88807 החבורה הסימטרית: רמזים לפתרון תרגיל מס' 1

מחלקות צמידות

תשע"ו

1. (מחלקות הצמידות בחבורה האלטרנטיבית A_n)

(א) תמורות הצמודות ב־A_n הן צמודות גם ב־S_n, ולכן מתאימה להן אותה חלוקה לאורכי מחזורים. מחזור באורך k מכפיל ב־$(-1)^{k-1}$ את סימן התמורה, ולכן, בתמורה זוגית, יש מספר זוגי של מחזורים באורך זוגי.

(ב) כל חלוקה כנ"ל מתאימה למחלקת צמידות אחת לפחות ב־A_n. יחידות מחלקת הצמידות תלויה בשאלה: האם יש תמורות, המתאימות לחלוקה זו, שאינן צמודות ב־A_n (למרות שהן, כמובן, צמודות ב־S_n)? אם קיימת תמורה אי־זוגית המתחלפת עם תמורה (זוגית) π המתאימה לחלוקה זו, אז כל הצמדה של π על ידי תמורה אי־זוגית ניתן להחליף בהצמדה ע"י תמורה זוגית, עם אותה תוצאה, ולכן מחלקת הצמידות יחידה. גם ההיפך נכון (מדוע?). נבדוק את המקרים האפשריים.

i. אם יש בתמורה π מחזור c באורך זוגי, אז c היא תמורה אי־זוגית המתחלפת עם π ולכן יש יחידות.

ii. אחרת, אם יש בתמורה π שני מחזורים זרים באותו אורך (אי־זוגי), נאמר $(i_1 i_2 \ldots i_{2t-1})$ ו־$(j_1 j_2 \ldots j_{2t-1})$, אז התמורה המחליפה ביניהם $(i_1 j_1)(i_2 j_2)\cdots(i_{2t-1} j_{2t-1})$ היא אי־זוגית ומתחלפת עם π. יש יחידות.

iii. לבסוף, אם בתמורה π יש רק מחזורים באורכים אי־זוגיים שונים, אז התמורות המתחלפות עם π הן מכפלות של חזקות של המחזורים הללו. כל המחזורים הם תמורות זוגיות, ולכן אין תמורה אי־זוגית המתחלפת עם π. התמורות π, $(12)\pi(12)$ אינן צמודות ב־A_n, אך כל תמורה מאותו מבנה מחזורים כמו π (כלומר: צמודה ל־π ב־S_n) צמודה לאחת מהן ב־A_n. יש בדיוק שתי מחלקות צמידות.

דוגמא: ב־A_4 יש 4 (ולא 3) מחלקות צמידות :
$$\{(1)\}, \{(12)(34), (13)(24), (14)(23)\}, \{(123)\}, \{(132)\}$$

2. (מחלקות הצמידות בחבורת הסימטריה של הקוביה B_n)

איבר של B_n הוא תמורה π של $[\pm n] = \{1, \ldots, n, -1, \ldots, -n\}$ המקיימת $\pi(-i) = -\pi(i)$ לכל i. ניתן להתאים לה תמורה $|\pi| \in S_n$ המוגדרת ע"י $|\pi|(i) = |\pi(i)|$ לכל $i \in [n]$. ההעתקה $\pi \mapsto |\pi|$ היא הומומורפיזם של חבורות מ־B_n על S_n. לתמורה $|\pi|$ ישנו פירוק למחזורים זרים, הנותן חלוקה של n. לכל מחזור באורך k של $|\pi|$, נאמר $(i_1 \ldots i_k)$, ניתן להגדיר סימן $\varepsilon \in \{1, -1\}$ ע"י: $\pi^k(i_t) = \varepsilon i_t$, כי $|\pi^k(i_t)| = i_t$; קל לראות שהסימן לא תלוי בבחירת t. נקרא למחזור "חיובי" או "שלילי" בהתאם לסימן. מחזור שלילי באורך k (של $|\pi|$) מתאים למחזור באורך $2k$ של π, שבו מופיעים גם i_t וגם $-i_t$ לכל t; ואילו מחזור חיובי באורך k (של $|\pi|$) מתאים לזוג מחזורים של π, באורך k כל אחד, שכל אחד מהם מכיל רק את i_t או רק את $-i_t$, לכל t. קיבוץ אורכי המחזורים החיוביים (של $|\pi|$) לחוד

ואורכי המחזורים השליליים לחוד נותן שתי חלוקות, חיובית ושלילית, שסכום גודליהן הוא n. הצמדה של π ע"י איבר של B_n שומרת על אורכי וסימני המחזורים, ולכן על זוג החלוקות הנ"ל. להיפך: אם לשני איברים של B_n יש אותו זוג חלוקות, קל לרשום איבר של B_n המעביר ביניהם ע"י הצמדה.
דוגמא: 8 אברי B_2 מתחלקים ל־5 מחלקות צמידות, המוגדרות ע"י זוגות החלוקות הבאים:

$$(\lambda_+, \lambda_-) = ((1,1),()) : \quad \{(1)(-1)(2)(-2)\}$$
$$(\lambda_+, \lambda_-) = ((1),(1)) : \quad \{(1)(-1)(2,-2),\ (2)(-2)(1,-1)\}$$
$$(\lambda_+, \lambda_-) = ((),(1,1)) : \quad \{(1,-1)(2,-2)\}$$
$$(\lambda_+, \lambda_-) = ((2),()) : \quad \{(1,2)(-1,-2),\ (1,-2)(-1,2)\}$$
$$(\lambda_+, \lambda_-) = ((),(2)) : \quad \{(1,2,-1,-2),\ (1,-2,-1,2)\}$$

3. (מחלקות הצמידות במכפלה השזורה (תמורות צבעוניות) $C_r \wr S_n$, כאשר C_r היא החבורה הציקלית מסדר r)

איבר של $C_r \wr S_n$ הוא מטריצה π מסדר $n \times n$, שבכל שורה ועמודה שלה יש איבר יחיד שונה מאפס, שהוא שורש יחידה מסדר r. אפשר לראות את π גם כתמורה של nr האיברים מהצורה $i\omega$, כאשר $i \in [n]$ ואילו ω הוא שורש יחידה מסדר r, המקיימת $\pi(i\omega) = \pi(i)\omega$ לכל i ו־ω. כמו בשאלה 2, אפשר להתאים ל־π תמורה $|\pi| \in S_n$, ע"י הפיכת כל שורש יחידה ל־1. לכל מחזור באורך k של $|\pi|$, נאמר $(i_1 \dots i_k)$, ניתן להגדיר "סימן" ω (שורש יחידה מסדר r) ע"י: $\pi^k(i_t) = \omega i_t$; הסימן לא תלוי בבחירת t. המחזורים של $|\pi|$ מתחלקים לפי שורשי היחידה השונים ומגדירים r חלוקות שסכום גודליהן n. כל סדרה של r חלוקות כאלו מתאימה באופן חד־חד־ערכי למחלקת צמידות במכפלה השזורה $C_r \wr S_n$.