

88807 החבורה הסימטרית: תרגיל מס' 2

אדר ב' תשע"ו

1. יהי $c(n, k)$ מספר התמורות $\pi \in S_n$ בעלות k מחזורים, $1 \leq k \leq n$. הוכיחו:

$$c(n, 0) = 0 \quad c(n, k) = (n-1)c(n-1, k) + c(n-1, k-1) \quad (1 \leq k \leq n) \quad (\text{א})$$

$$c(n, n+1) = 0 \quad (n \geq 1), \quad c(1, 1) = 1$$

$$\prod_{k=1}^n (x+k-1) = \sum_{k=1}^n c(n, k)x^k \quad (\text{ב})$$

2. יהי $e(n, k)$ מספר התמורות $\pi \in S_n$ בעלות $k-1$ מורדות (descents), $1 \leq k \leq n$. הוכיחו:

$$e(n, k) = e(n, n+1-k) \quad (\text{א})$$

$$e(n, 0) = 0 \quad e(n, k) = ke(n-1, k) + (n-k+1)e(n-1, k-1) \quad (1 \leq k \leq n) \quad (\text{ב})$$

$$e(n, n+1) = 0 \quad (n \geq 1), \quad e(1, 1) = 1$$

$$x^n = \sum_{k=1}^n e(n, k) \binom{x+k-1}{n} = \sum_{k=1}^n e(n, k) \binom{x+n-k}{n} \quad (\text{ג})$$