88807 החבורה הסימטרית: רמזים לפתרון תרגיל מס' 2

תשע"ו

1. אלו מספרי סטירלינג מסוג ראשון, ללא סימן.

(א) תנאי השפה ברורים. הרקורסיה מתקבלת מהוספת המספר n לתמורה ב־S_{n-1}: או למחזור קיים, בכל מקום אפשרי (סה"כ $n-1$ אפשרויות), או כמחזור נוסף חדש (אפשרות אחת). מכאן שני המחוברים ברקורסיה.

(ב) הנוסחה נובעת מהרקורסיה, באינדוקציה על n: עבור $n=1$ מתקיים כמובן $x = c(1,1)x$, ובשלב האינדוקציה

$$\sum_{k=1}^{n} c(n,k)x^k = \sum_{k=1}^{n}[(n-1)c(n-1,k)+c(n-1,k-1)]x^k$$

$$= (n-1)\sum_{k=1}^{n} c(n-1,k)x^k + \sum_{k=1}^{n} c(n-1,k-1)x^k = (n-1)\sum_{k=1}^{n-1} c(n-1,k)x^k + \sum_{k=1}^{n-1} c(n-1,k)x^{k+1}$$

$$= (n-1+x)\sum_{k=1}^{n-1} c(n-1,k)x^k$$

השתמשנו כאן בתכונות $c(n-1,n) = c(n-1,0) = 0$. לפי הנחת האינדוקציה מתקבל, כנדרש,

$$(x+n-1)\prod_{k=1}^{n-1}(x+k-1) = \prod_{k=1}^{n}(x+k-1)$$

2. אלו המספרים האוילריאניים.

(א) היפוך סדר: החלפת π ב־$\sigma\pi$, כאשר $\sigma = (1,n)(2,n-1)\cdots$.

(ב) הרקורסיה מתקבלת מהוספת המספר n לתמורה ב־S_{n-1}: או כשיש בה $k-1$ מורדות, ומוסיפים את n אחרי אחד מהם או בסוף התמורה (k אפשרויות), או כשיש בה $k-2$ מורדות, ומוסיפים את n לא אחרי מורד ולא בסוף ($n-k+1$ אפשרויות).

(ג) נובע מסעיפים (א), (ב) באינדוקציה על n. למשל, השוויון הראשון: עבור $n=1$ מתקיים כמובן $x = e(1,1)x$. בשלב האינדוקציה

$$\sum_{k=1}^{n} e(n,k)\binom{x+k-1}{n} = \sum_{k=1}^{n}[ke(n-1,k)+(n-k+1)e(n-1,k-1)]\binom{x+k-1}{n}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} ke(n-1,k)\binom{x+k-1}{n} + \sum_{k=1}^{n-1}(n-k)e(n-1,k)\binom{x+k}{n}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1}\left[\frac{k(x+k-n)}{n}\binom{x+k-1}{n-1} + \frac{(n-k)(x+k)}{n}\binom{x+k-1}{n-1}\right]e(n-1,k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} x\binom{x+k-1}{n-1}e(n-1,k) = xx^n = x^{n+1}$$