88807 החבורה הסימטרית: תרגיל מס' 3

ספירת טי"סות (SYT enumeration)

אייר תשע"ו

1. תהי λ חלוקה. הוכיחו: $f^\lambda = 1$ אם ורק אם הדיאגרמה $[\lambda]$ היא **שורה** או **עמודה** , כלומר $\lambda = (m)$ או $\lambda = (1^k) = (1, \dots, 1)$.

2. תהי λ חלוקה כך שהדיאגרמה $[\lambda]$ היא **בצורת וו**, כלומר: $\lambda = (m, 1^k) = (m, 1, \dots, 1)$, כולל המקרים הפרטיים $\lambda = (m)$ (שורה), $\lambda = (1^k)$ (עמודה). הוכיחו: $f^\lambda = \binom{m+k-1}{k}$.

3. תהי $\lambda = (a, b)$ חלוקה בעלת **שתי שורות** לכל היותר ($a \ge b \ge 0$). הוכיחו כי $f^{(a,b)} = \binom{a+b}{b} - \binom{a+b}{b-1}$, ובפרט $f^{(a,a)} = \frac{1}{a+1}\binom{2a}{a}$ (מספר קטלאן). עשו זאת בשתי דרכים:

   (א) ע"י שימוש באחת מנוסחאות המניה לטי"סות.

   (ב) ע"י שימוש באחת הפרשנויות לטי"סות, למשל כהילוכי שריג $(a, b) \to (0, 0)$, עם צעדים $(1, 0)$ או $(0, 1)$, שאינם חורגים מהתחום $x \ge y \ge 0$. **רמז:** הילוכי שריג מקיימים באופן טבעי $x, y \ge 0$, אך לאו דווקא $x \ge y$. הילוך החורג מתחום זה מגיע בהכרח לנקודה על הישר $y = x + 1$. אם נחליף, מנקודת הפגישה הראשונה עם הישר ואילך, כל צעד $(1, 0)$ בצעד $(0, 1)$ולהיפך - נקבל הילוך שריג $(b-1, a+1) \to (0, 0)$. ההתאמה בין הילוכי $(a, b) \to (0, 0)$ חריגים להילוכי $(b-1, a+1) \to (0, 0)$ (שהם תמיד חריגים...) היא חח"ע.

4. תהי $\lambda = (m^k) = (m, \dots, m)$ חלוקה עם דיאגרמה מלבנית. הוכיחו:

$$f^{(m^k)} = (mk)! \cdot \frac{F(m)F(k)}{F(m+k)}$$

כאשר

$$F(m) := \prod_{i=0}^{m-1} i!$$

5. הוכיחו: אם $\lambda \vdash n$ אז f^λ מחלק את $n!$.

6. תמורה $\sigma \in S_n$ נקראת **תמורת זיגזג** (up-down permutation) אם $\sigma(1) < \sigma(2) > \sigma(3) < \sigma(4) > \dots$.
הוכיחו: מספר תמורות הזיגזג ב-S_n שווה למספר הטי"סות $f^{\lambda/\mu}$ עבור צורת ההפרש

$$\lambda/\mu = (k+1, k, \dots, 2)/(k-1, k-2, \dots, 0)$$

כאשר $n = 2k$ זוגי, ועבור צורת ההפרש

$$\lambda/\mu = (k+1, k+1, k, \dots, 2)/(k, k-1, k-2, \dots, 0)$$

כאשר $n = 2k+1$ אי-זוגי. **הערה:** אם נסמן ב-A_n את מספר תמורות הזיגזג ב-S_n אז ניתן להראות שהפונקציה היוצרת המעריכית

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{x^n}{n!} = \sec(x) + \tan(x).$$

ראו Adin-Roichman, Proposition 7.7 ובהמשך שם את הקשר למספרי אוילר ומספרי ברנולי.

7. האם $f^{\lambda/\mu}$, עבור צורת הפרש בגודל n, תמיד מחלק את $n!$? בדקו עבור צורות הזיגזג (כמו בשאלה 6) בגודל 4 ובגודל 5.