

88807 החבורה הסימטרית: רמזים לפתרון תרגיל מס' 3

ספירת טי"סות (SYT enumeration)

תשע"ו

1. לצורה המכילה ריבוע 2×2 יש לפחות שני מילויים סטנדרטיים.
2. הערך בפניה הוא כמובן 1. את k הערכים האחרים בעמודה הראשונה אפשר לבחור באופן חופשי מתוך $\{2, \dots, m+k\}$, כשהם מסודרים כמובן בסדר עולה.
- 3.

(א) למשל, מנוסחת אורכי הוויים:

$$f^\lambda = \frac{(a+b)!}{b!(a-b)!(a-b+2)\cdots(a+1)} = \frac{(a+b)!(a-b+1)}{b!(a+1)!} = \binom{a+b}{b} - \binom{a+b}{b-1}$$

(ב) הרמז נמצא כבר בשאלה.

4. למשל, מנוסחת אורכי הוויים:

$$\frac{(mk)!}{f^\lambda} = \prod_{i=0}^{k-1} \prod_{j=0}^{m-1} (i+j+1) = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{(i+m)!}{i!} = \frac{F(m+k)}{F(m)F(k)}$$

5. מידי מנוסחת אורכי הוויים.

6. טי"ס"ה מהצורה הנ"ל אפשר לקרוא לפי הסדר, החל מהפניה הדרום-מערבית, ולקבל סדרה (תמורה). התנאים עליה הם בדיוק התנאים המגדירים תמורת זיגזג. דרך אגב, קל לראות שהמספר A_n של תמורות הזיגזג ב- S_n מקיים את נוסחת הרקורסיה

$$2A_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A_k A_{n-k} \quad (n \geq 1)$$

עם תנאי ההתחלה $A_0 = A_1 = 1$. לכן הפונקציה היוצרת המעריכית $a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{x^n}{n!}$ מקיימת

$$a(x) = \frac{1 + \sin(x)}{\cos(x)} \quad \text{כלומר, } a(0) = 1 \text{ עם } 2a'(x) = a(x)^2 + 1$$

7. לא. מספר הטיסו"ת מצורת זיגזג בגודל 4 הוא, בחישוב ישיר, 5 (לא מחלק את $4! = 24$); מספר הטיסו"ת מצורת זיגזג בגודל 5 הוא 16 (לא מחלק את $5! = 120$).