

תורת ההצגות

אייר תשע"ו

בתרגיל זה נמצא את האופיינים (כרקטרים) האי־פריקים של כמה חבורות סימטריות (ומתחלפות) קטנות, בעזרת תורת ההצגות הכללית בלבד. בתרגיל הבא נשתמש כבר בתורת ההצגות המיוחדת של החבורה הסימטרית.

1. (כרקטרים של חבורה קומוטטיבית)

- (א) תהי  $G$  חבורה קומוטטיבית מסדר  $n$ . מה מספר מחלקות הצמידות של  $G$  ?
- (ב) מה מספר הכרקטרים האי־פריקים של  $G$  ? נסמן  $d_i = \chi_i(1_G)$ . רשמו את המשוואה המקשרת בין כל ה־ $d_i$  והסיקו: כל ההצגות האי־פריקות של  $G$  הן חד־ממדיות.
- (ג) להיפך: נניח ש־ $G$  היא חבורה סופית שכל ההצגות האי־פריקות שלה הן חד־ממדיות. מצאו את מספר הכרקטרים האי־פריקים והסיקו ש־ $G$  קומוטטיבית.
- (ד) באופן מפורש: תהי  $G$  חבורה ציקלית מסדר  $n$ , עם יוצר  $g$ , ויהי  $\omega$  שורש יחידה פרימיטיבי (מרוכב) מסדר  $n$ , למשל  $\omega = \exp(2\pi i/n)$ . נגדיר, לכל  $j, k \in \mathbb{Z}$  (מספיק לקחת  $0 \leq j, k \leq n-1$ )  $\chi_j(g^k) = \omega^{jk}$ : הוכיחו ש־ $\chi_j : G \rightarrow \mathbb{C}$  הם כרקטרים אי־פריקים שונים של  $G$ , והם כל הכרקטרים האי־פריקים של  $G$ .
- (ה) רשמו את טבלאות הכרקטרים של  $S_1, S_2, A_3$  (שורות = כרקטרים, עמודות = מחלקות צמידות). **הערה:** ניתן למצוא במפורש את הכרקטרים האי־פריקים של חבורה קומוטטיבית סופית כלשהי ע"י הצגתה כמכפלה ישרה של חבורות ציקליות.

2. (כרקטרים של  $S_3$ )

- (א) מה מספר מחלקות הצמידות של  $S_3$  ? רשמו אותן (לפי מבנה מחזורים) ואת גודליהן.
- (ב) רשמו את המשוואה המקשרת בין הממדים  $d_i$  של הכרקטרים האי־פריקים של  $S_3$  (מה מספרם?), ומצאו את ערכי  $d_i$ . סדרו אותם מהקטן לגדול.
- (ג) רשמו טבלת כרקטרים (ריקה) עבור  $S_3$ : השורות הן הכרקטרים האי־פריקים של  $S_3$ , בסדר עולה של  $d_i$ , והעמודות הן מחלקות הצמידות.
- (ד) כמו לכל חבורה, גם ל־ $S_3$  יש כרקטר טריוויאלי  $\chi_1(\sigma) = 1$  ( $\forall \sigma \in S_3$ ). כמו כן קיים גם **כרקטר הסימן**  $\chi_2(\sigma) = \text{sign}(\sigma)$  (בדקו שהוא כרקטר אי־פריק). רשמו את ערכיהם בטבלה, ובדקו שהם מקיימים את יחסי הניצבות  $\langle \chi_i, \chi_j \rangle = \delta_{ij}$ .
- (ה) השלימו את הטבלה בעזרת תוצאות סעיף ב' ובעזרת יחסי ניצבות. זכרו שבמכפלה הפנימית יש סכום על כל אברי החבורה, ולכן כל מחלקת צמידות מופיעה בהתאם לגודלה.