88807 החבורה הסימטרית: רמזים לפתרון תרגיל מס' 4

תורת ההצגות

אייר תשע"ו

1. (כרקטרים של חבורה קומוטטיבית)

   (א) n.

   (ב) מספר הכרקטרים האי־פריקים של G שווה למספר מחלקות הצמידות, כלומר n. המשוואה $d_1^2+\ldots+d_n^2=|G|=n$ מחייבת, כמובן, $d_1=\ldots=d_n=1$.

   (ג) אם כל ההצגות האי־פריקות הן חד־ממדיות ומספרן k, אז $d_1=\ldots=d_k=1$ יחד עם $d_1^2+\ldots+d_k^2=n$ נותן $k=n$. לכן מספר מחלקות הצמידות הוא כגודל החבורה, והיא בהכרח קומוטטיבית.

   (ד) קל לבדוק שכל $\chi_j : G \to \mathbb{C}$ הוא כפלי, כלומר כרקטר חד־ממדי (בפרט, אי־פריק), וכן ש־ $\chi_0,\ldots,\chi_{n-1}$ כולם שונים (למשל בערכיהם על האיבר g), ולכן הם כל הכרקטרים האי־פריקים של G.

   (ה) אלו חבורות ציקליות מסדרים 1, 2, 3.

2. (כרקטרים של S_3)

   (א) ב־S_3 יש 3 מחלקות צמידות, בגדלים 1, 3, 2: $\{(1)(2)(3)\},\{(12)(3),(13)(2),(23)(1)\},\{(123),(132)\}$

   (ב) יש 3 כרקטרים אי־פריקים. ממדיהם מקיימים: $d_1^2+d_2^2+d_3^2=6$, עם פתרון יחיד (עד כדי סדר): $d_1=d_2=1,\ d_3=2$.

   (ג) הטבלה הריקה:

size	1	3	2
conjugacy class	(1^3)	$(2,1)$	(3)
χ_1			
χ_2			
χ_3			

(ד) הטבלה החלקית:

size	1	3	2
conjugacy class	(1^3)	$(2,1)$	(3)
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3	d_3	x	y

בדיקה:

$$\langle\chi_1,\chi_1\rangle = 1\cdot 1^2 + 3\cdot 1^2 + 2\cdot 1^2 = 6$$

$$\langle\chi_1,\chi_2\rangle = 1\cdot 1\cdot 1 + 3\cdot 1\cdot(-1) + 2\cdot 1\cdot 1 = 0$$

$$\langle\chi_2,\chi_2\rangle = 1\cdot 1^2 + 3\cdot(-1)^2 + 2\cdot 1^2 = 6$$

(ה) יחסי הניצבות של χ_3 נותנים:

$$\langle\chi_1,\chi_3\rangle = 1\cdot 1\cdot d_3 + 3\cdot 1\cdot x + 2\cdot 1\cdot y = 0$$

$$\langle\chi_2,\chi_3\rangle = 1\cdot 1\cdot d_3 + 3\cdot(-1)\cdot x + 2\cdot 1\cdot y = 0$$

$$\langle\chi_3,\chi_3\rangle = 1\cdot d_3^2 + 3\cdot x^2 + 2\cdot y^2 = 6$$

ולכן $x=0$, $d_3=-2y$, $d_3^2+2y^2=6$. הפתרון היחיד עם d_3 חיובי הוא $d_3=2, x=0, y=-1$. הטבלה המלאה:

size	1	3	2
conjugacy class	(1^3)	$(2,1)$	(3)
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3	2	0	-1