<u>החבורה הסימטרית (88807) : תרגילי חזרה</u>

.1

א) הוכיחו: החבורה הסימטרית S_n נוצרת על ידי זוג התמורות (12), $(12\ldots n)$.

ב) הוכיחו: החבורה S_5 <u>איננה</u> נוצרת על ידי זוג התמורות (123), (12345).

.2

א) עבור תמורה $\pi \in S_n$ נסמן ב- $cyc(\pi)$ את מספר המחזורים הזרים ב- π, וב- $\overrightarrow{\max}(\pi)$ את מספר הערכים שהם מירביים ביחס לכל קודמיהם:

$$\overrightarrow{\max}(\pi) := \#\left\{1 \le j \le n \mid \pi(j) = \max_{1\le i\le j} \pi(i)\right\}$$

הוכיחו של- $cyc(\pi)$ ול- $\overrightarrow{\max}(\pi)$ יש אותה התפלגות על S_n:

$$\sum_{\pi\in S_n} q^{cyc(\pi)} = \sum_{\pi\in S_n} q^{\overrightarrow{\max}(\pi)}$$

ב) מצאו את התמורות שעבורן $cyc(\pi)=1$ ואת אלו שעבורן $\overrightarrow{\max}(\pi)=1$. מה מספרן?

.3 תהי $G=\left\langle a,b \mid a^2, b^5, abab\right\rangle$.

א) מצאו מילה קצרה ככל האפשר המייצגת את האיבר $g=b^{-2}aba^3b^2a^2b^3 \in G$.

ב) נגדיר:

$$X(a)=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X(b)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

הוכיחו שניתן להרחיב הגדרה זו להצגה דו-ממדית $X: G \to GL_2(\mathbb{R})$.

.4 הוכיחו: מספר הכרקטרים החד-ממדיים של חבורת קוקסטר W הוא 2^c, כאשר c הוא מספר רכיבי הקשירות של דיאגרמת דינקין של W אחרי השמטת כל הקשתות עם m_{ij} זוגי.

.5

א) הוכיחו: אם $\lambda=(n)$ (שורה אחת) אז $\chi^\lambda(\pi)=1$ לכל $\pi \in S_n$.

ב) הוכיחו: אם $\lambda=(1,\ldots,1)$ (עמודה אחת) אז $\chi^\lambda(\pi)=sign(\pi)$ לכל $\pi\in S_n$.

.6 הוכיחו: לכל חלוקה λ של n ולכל $\pi \in S_n$:

$$\chi^{\lambda'}(\pi)=sign(\pi)\cdot\chi^\lambda(\pi)$$

כאשר λ' היא החלוקה הצמודה (משוחלפת) ל- λ.

.7 הוכיחו, בעזרת נוסחת מורנגן-נקיאמה: אם $\lambda=(5,4,3,2,1)$, $\pi=(1,2)\in S_{15}$ אז $\chi^\lambda(\pi)=0$.

.8 עבור $\lambda=(4,2,2)$, $\pi=(1,2,3)(4,5)\in S_8$ חשבו את $\chi^\lambda(\pi)$.

9. נתון: $\pi \in S_6$ מתאימה, על ידי אלגוריתם רובינסון-שנסטד, לזוג הטבלאות (הנתון חלקית)

$$(P,Q)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & * & , & 1 & 3 & 4 \\ 3 & * & 6 & & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

א) מהו אורך תת-הסדרה העולה הארוכה ביותר של $(\pi(1),\ldots,\pi(6))$?

ב) רשום במפורש את שתי האפשרויות עבור π.

10. נתון: $\pi \in S_5$ מתאימה, על ידי אלגוריתם רובינסון-שנסטד, לזוג הטבלאות

$$(P,Q)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & , & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & & & 2 & 4 & \end{pmatrix}$$

א) מצאו את זוג הטבלאות המתאים לתמורה π^r, המתקבלת מקריאת סדרת ערכי π מהסוף להתחלה:

$$\pi^r(i)=\pi(6-i) \qquad (1\le i\le 5)$$

ב) רשמו במפורש את π ואת π^r, והסבירו כיצד ניתן לראות מתוך הטבלאות ש-π^r היא אינבולוציה.

11. הוכיחו, בעזרת משפט שנסטד, את משפט ארדש-סקרש: עבור כל n, m טבעיים, בכל תמורה $\pi \in S_{mn+1}$ יש תת-סדרה עולה באורך $m+1$ או תת-סדרה יורדת אורך $n+1$.

12. תהי $\pi = 241653 \in S_6$. העזרו במשפט גרין (או במשפט שנסטד) כדי למצוא את הצורה λ המשותפת לטבלאות P, Q המתאימות ל-π על ידי אלגוריתם רובינסון-שנסטד (מבלי למצוא את הטבלאות עצמן).

13. תהי $\lambda=(5,1)$ חלוקה של 6.

א) חשבו בעזרת נוסחת הווים את f^λ, מספר טבלאות יאנג הסטנדרטיות מצורה λ.

ב) רשמו במפורש את כל הטבלאות הנ"ל.

ג) תהי X^λ ההצגה האי-פריקה המתאימה ל-λ, ותהי $\pi=(1,2)\in S_6$. חשבו במפורש את פעולת $X^\lambda(\pi)$ על כל הטבלאות הנ"ל (על פי צורת יאנג האורתוגונלית), והסיקו מהחישוב את ערך הכרקטר המתאים $\chi^\lambda(\pi)$.