החבורה הסימטרית (88807) : תרגילי חזרה
רמזים ותשובות

1.
א) מספיק ליצור את כל החילופים הסמוכים (יוצרי קוקסטר) $(i,i+1)$.
ב) שתי התמורות זוגיות.

2.
א) נרשום את $\pi\in S_n$ באופן קנוני כמכפלת מחזורים זרים, כאשר המספר הראשון בכל מחזור הוא הגדול ביותר במחזור, והמחזורים רשומים בסדר עולה של המספרים הראשונים הנ"ל. אם נגדיר את $\sigma\in S_n$ כך שסדרת הערכים $(\sigma(1),\ldots,\sigma(n))$ היא סדרת המספרים הנ"ל (מחזורי π), קל להוכיח כי $cyc(\pi)=\overrightarrow{\max}(\sigma)$. ההתאמה היא חח"ע ועל.
ב) $cyc(\pi)=1$ אםם π היא מחזור אחד באורך n. $\overrightarrow{\max}(\pi)=1$ אםם π מקיימת $\pi(1)=n$. בשני המקרים המספר הוא $(n-1)!$.

3. תהי $G=\left\langle a,b\mid a^2,b^5,abab\right\rangle$.
א) $g=b^2$.
ב) מספיק לבדוק שהמטריצות מקיימות את היחסים המגדירים את החבורה.

4. נסמן את ערכו של כרקטר חד-ממדי χ על יוצר קוקסטר s_i על ידי $\varepsilon_i:=\chi(s_i)$. s_i הוא אינבולוציה, ולכן $\varepsilon_i=\pm1$. אם m_{ij} אי-זוגי אז $(\varepsilon_i\varepsilon_j)^{m_{ij}}=1$ גורר $\varepsilon_i=\varepsilon_j$, ולכן הכרקטר קבוע על כל רכיב קשירות כנ"ל. מצד שני, אפשר להגדיר אותו שרירותית (±1) על כל רכיב קשירות בנפרד, ולבדוק שמתקיימים כל היחסים המגדירים את החבורה.

5.
א) בעזרת הצורה האורתוגונלית של יאנג (יש טבלת יאנג סטנדרטית יחידה) או בעזרת נוסחת מורנגן-נקיאמה.
ב) כנ"ל.

6. השוואה זהירה של הפעלת נוסחת מורנגן-נקיאמה על טבלה ועל הטבלה המשוחלפת.

7. אי אפשר להוריד רצועת שפה באורך 2.

8. כדאי להוריד תחילה רצועת שפה באורך 3, ואחר כך באורך 2 וכו'. מקבלים $\chi^{\lambda}(\pi)=-2$.

9.
א) 3.

ב) $314625 \quad 315624$.

10.

א) $(P,Q)=\begin{pmatrix} 1 & 3 & & 1 & 3 \\ 2 & 5 & , & 2 & 5 \\ 4 & & & 4 & \end{pmatrix}$

ב) $\pi=31524$, $\pi^r=42513$. מכיוון שמתקיים $P=Q$ עבור π^r נובע ש-π^r היא אינבולוציה, ואכן $\pi^r=(14)(2)(35)$.

11. לפי משפט שנסטד, אם בתמורה π אין תת-סדרה עולה באורך $m+1$ אז בחלוקה המתאימה λ (שהיא הצורה של טבלאות רובינסון-שנסטד של π) אורך השורה הראשונה הוא לכל היותר m. באופן דומה אורך העמודה הראשונה הוא לכל היותר n, ולכן λ מוכלת במלבן $n\times m$. מספר התאים אינו עולה על mn, בסתירה לנתון $\pi\in S_{mn+1}$.

12. $\lambda=(3,2,1)$.

13.

א) $f^{\lambda}=\dfrac{6!}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 6\cdot 1}=5$.

ג) 1, 2 נמצאים באותה שורה ב-4 מהטבלאות, ובאותה עמודה בטבלה החמישית. לכן $\chi^{\lambda}(\pi)=1+1+1+1-1=3$.