22.5.16

החבורה הסימטרית - הרצאה מס' 10

הצגות של החבורה הסימטרית

(מרצה - הרצאה בנושא - לפי הספר של Sagan
ראה הנושא בספר מסתמך על [James, '78])

תזכורת: תורת ההצגות הלינאריות של חבורות סופיות

הגדרה: הצגה (לינארית) של חבורה סופית G
היא הומומורפיזם של חבורות $T: G \to GL(V)$
כאשר V מ"ו סופי מימד מעל שדה $\mathbb{F}$.
ו־ $GL(V)$ = חבורת האופרטורים הלינאריים ההפיכים $A: V \to V$.

אם בוחרים בסיס ל־ V (כמ"ו מעל שדה $\mathbb{F}$),
אפשר לרשום במפורש $T: G \to GL_n(\mathbb{F})$
כאשר $GL_n(\mathbb{F})$ = חבורת המטריצות ההפיכות מסדר $n \times n$ מעל $\mathbb{F}$.

הערות

* יש הצגות של חבורות לא סופיות (לא נעסוק בכך).
* יש הצגות של אובייקטים יותר כלליים מחבורות.
בעצם, הצגה של חבורה G היא
הצגה של אלגברת החבורה $\mathbb{F}[G]$.
(גם על זה לא נדבר בהרצאה זו).
* אני נעסוק בהצגות מעל שדה $\mathbb{F}$ עם $char\,\mathbb{F}=0$,
ונניח למען הפשטות שהוא סגור אלגברית,
ואפילו נניח תמיד $\mathbb{F}=\mathbb{C}$. נעיר שהתוצאות
נכונות גם לשדה $\mathbb{F}$ (סגור אלגברית, או מספיק גדול)
עם $char\,\mathbb{F}=p$ סופי שאינו מחלק את $|G|$
לכן תורת ההצגות הרגילה. אם $char\,\mathbb{F}$ מחלק את $|G|$
- נקבל תורת הצגות מודולריות, שהיא מורכבת יותר (לא נעסוק בה כאן).

אם כן, אנו מדברים על הצגות $T:G\to GL(V)$
של חבורה סופית G כאשר V מ"ו סופי מעל $\mathbb{C}$.

<u>ניסוח שקול:</u>

V הוא <u>G-מודול</u> (או בניסוח יותר מדויק $\mathbb{C}[G]$-מודול), לפי ההגדרה

$$g\circ v := T(g)(v) \qquad (\forall g\in G,\ v\in V)$$

ואת הרחבה ל-$\mathbb{C}[G]$ עפ"י לינאריות.

$$\Big(\sum_{g\in G}\alpha_g g\Big)\cdot v := \sum_{g\in G}\alpha_g T(g)(v) \qquad (\forall \alpha_g\in F,\ v\in V)$$

<u>הגדרה:</u>

$\mathbb{C}[G]$-מודול V נקרא <u>אי-פריק</u> (irreducible)
(והצגה מתאימה של G נקראת אי-פריקה)
אם אין ל-V תת-מודול לא טריוויאלי ($W\neq\{0\},V$)
כלומר: אם אין ל-V תת-מרחב לא טריוויאלי אינווריאנטי תחת פעולת G.

אפשר לדבר על איזומורפיזם וגם <u>סכום ישר</u> של מודולים:

<u>משפט Maschke:</u>

G מודול ממימד סופי של $F[G]$
(כאשר G חבורה סופית, F שדה, $\mathrm{char}\,F$ לא מחלק את $|G|$)
הוא סכום ישר של מודולים אי-פריקים. ($F[G]$ נקרא פריק לגמרי, completely reducible)

<u>הערה:</u> במקרה המודולרי ($\mathrm{char}\,F \mid |G|$),
משפט זה <u>אינו</u> נכון. שם יתכן מודול שהוא <u>פריק</u> (reducible) (כלומר יש לו תת-מודול לא טריוויאלי)
אבל הוא אי-פריד (indecomposable) (כלומר איננו סכום ישר של שני תת-מודולים לא טריוויאליים).

כך מקבלים לקיום של מטריצה משולשית לא לכסינה

$$\begin{pmatrix} \Delta & * \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

יש לנו עניין רק במודולים האי-פריקים, אלו אבני הבניין.

<u>שאלה:</u>

האם יש מספר סופי של מודולים אי-פריקים?

ראשית, לא נבחין בין מודולים איזומורפיים (או הצגות איזומורפיות).

איך אפשר לדעת אם שני מודולים נתונים הם איזומורפיים?

<u>הגדרה:</u>

אם $T : G \to GL(V)$ הצגה, אז הכרקטר (character) המתאים $\chi : G \to F$ מוגדר ע"י:

$$\chi(g) := \underbrace{tr}_{\text{עקבה (trace)}}\, T(g) \qquad (\forall g \in G)$$

<u>משפט:</u>

שתי הצגות איזומורפיות $\iff$ יש להן בדיוק אותו כרקטר (שני "מודולי" FG הם איז').

השאלה היא אם כן:

האם ל-G יש מספר סופי של כרקטרים אי-פריקים? (= כרקטרים המתאימים למודולים אי-פריקים).

אבחנה:

כל קרקטר הוא פונקציית מחלקה (class function)
כלומר פונקציה $\chi: G \to F$ שהיא קבועה על מחלקות צמידות

$$\chi(g^{-1}\tilde{g}g) = \chi(\tilde{g}) \quad (\forall g,\tilde{g} \in G)$$

הוכחה:

$$\chi(g^{-1}\tilde{g}g) = tr\,T(g^{-1}\tilde{g}g) =$$
$$= tr\left[T(g^{-1}) \cdot T(\tilde{g}) \cdot T(g)\right] =$$
$$= tr\left[T(\tilde{g}) \cdot T(g) \cdot T(g^{-1})\right] = tr\,T(\tilde{g}) = \chi(\tilde{g}) \quad \blacksquare$$

ברור שאוסף כל פונקציות המחלקה מ-G ל-F הוא מרחב וקטורי מעל F, שממדו = מס' מחלקות הצמידות של G.

נגדיר, לכל שתי פונקציות מחלקה $\psi_1, \psi_2 : G \to \mathbb{C}$:

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle := \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \psi_1(g)\cdot\overline{\psi_2(g)}$$

משפט:

(א) $\langle , \rangle$ היא מכפלה פנימית על מרחב פונקציות המחלקה.

(ב) הקרקטרים האי-פריקים מהווים בסיס אורתונורמלי ביחס למכפלה פנימית זו.

מסקנה:

מס' הקרקטרים האי-פריקים השונים = ממד מרחב פונקציות המחלקה = מס' מחלקות הצמידות ב-G.

$$\langle \chi_i, \chi_j \rangle = \delta_{ij} \quad (\chi_i, \chi_j \text{ קרקטרים אי-פריקים})$$

[redacted] **דוגמאות:**

(*) G כלשהי, $\dim V = 1$, הרצגה הטריוויאלית

$$T: G \to GL(V)$$
$$g \mapsto I$$

מטריצת יחידה

בחור ש V מודול אי-פריק (כי מימדו $= 1$)

מבדק אחרת:

הכרקטר הטריוויאלי $\chi = tr\, T$:

$$\chi: G \to \mathbb{C}$$
$$g \mapsto 1$$

נבדוק

$$\langle \chi,\chi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum \chi(g)\overline{\chi(g)} = \frac{1}{|G|} \cdot |G| = 1$$

זה מתאים לכך ש χ אי-פריק. למעשה, זו הוכחה לכך ש χ אי-פריק.

מדוע?

לפי משפט Maschke, כל מודול הוא סכום ישר של מודולים אי-פריקים. לכן הכרקטר המתאים הוא סכום הכרקטרים האי-פריקים המתאימים, כלומר:

$$\chi = m_1\chi_1 + \dots + m_k\chi_k$$

כאשר $\chi_1,\dots,\chi_k$ הם הכרקטרים האי-פריקים של G, ואילו m_i הוא הריבוי של χ_i ב-χ, שהוא מספר שלם אי-שלילי ($1 \le i \le k$). אז:

$$\langle \chi,\chi \rangle = \langle \sum_i m_i\chi_i, \sum_j m_j\chi_j \rangle = \sum_{i,j} m_i m_j \langle \chi_i,\chi_j \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{k} m_i^2$$

נשים לב: $m_i = \langle \chi,\chi_i \rangle$. לכן:

(*) פונקציה מחלקה $\varphi: G \to \mathbb{C}$ היא כרקטר $\iff$ כל המכפלות $\langle \varphi,\chi_i \rangle$ הן שלמים אי-שליליים.

(א) אם $\chi: G\to\mathbb{C}$ הוא כרקטר, אז χ אי-פריק $\iff$ $\langle\chi,\chi\rangle=1$.

$\Downarrow$

מיידי נובעת הערה נו לעיל, שהכרקטר הטריוויאלי הוא אי-פריק כי הוא כרקטר ומקיים $\langle\chi,\chi\rangle=1$.

(א) G חבורה סופית, $V=\mathbb{C}[G]$, $T:G\to GL(V)$ משפר אז $T(g)(\tilde{g'}) := \widetilde{gg'}$ (כפל בחבורה G), וגם הרחבה לינארית.

T הנא ההצגה הרגולרית של G.

לכן:

$$\chi(g) = tr\,T(g) = \begin{cases} |G|, & g=1_G \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

לכן כרקטר אי-פריק χ_i:

$$\langle\chi_i,\chi\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_i(g)\overline{\chi(g)} = \frac{1}{|G|}\chi_i(1_G)\overline{\chi(1_G)} = \chi_i(1_G)$$

ולכן בכרקטר הרגולרי, הריבוי של T_i הוא

$$\chi_i(1_G) = \dim V_i$$

$$\left(\text{הסבר:}\quad \overset{\text{יש}}{tr\,T_i(1_G)} = \overset{\text{זהו}}{tr(I_{V_i})}\right)$$

$$\chi_{\text{רגול'}} = \sum_{i=1}^{k}\chi_i(1_G)\,\chi_i$$

בפרט שקבלנו:

$$\langle\chi_{\text{רגול'}},\chi_{\text{רגול'}}\rangle = \frac{1}{|G|}\chi_{\text{רגול'}}(1_G)\overline{\chi_{\text{רגול'}}(1_G)} = \frac{1}{|G|}\cdot|G|^2 = |G|$$

ומצד שני:

$$\langle\chi_{\text{רגול'}},\chi_{\text{רגול'}}\rangle = \sum_{i=1}^{k} m_i^2 = \sum_{i=1}^{k}(\dim V_i)^2$$

כלומר:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{k}(\dim V_i)^2}_{\text{ממדי ההצגות}} = |G|$$

צמצום והשראה:

תהי G חבורה סופית עם תת-חבורה H.

הגדרה:

יהי χ כרקטר של G. הצמצום (restriction) של χ מ-G ל-H

$\psi=\chi\downarrow^G_H$ מוגדר ע"י:

$$\psi(h)=\chi(h) \quad (\forall h\in H)$$ (צמצום של פונקציה)

לא קשה לבדוק שזה אכן כרקטר של H (בדוק ההצגה המתאימה).

הגדרה:

יהי ψ כרקטר של H. ההשראה (induction) של ψ מ-H ל-G

$\chi=\psi\uparrow^G_H$ מוגדרת באחד משני האופנים השקולים:

(1) כמודול: $\mathbb{C}[G]\otimes_{\mathbb{C}[H]} V$

H-מודול מתאים ל-ψ.

(2) אם $G=\dot\bigcup_i g_iH$, $T:H\to GL(V)$ הצגה המתאימה ל-ψ,

אז ההצגה המתאימה ל-χ היא:

$$g\longmapsto A=\left(T(g_i^{-1}gg_j)\right)_{i,j} \qquad \begin{pmatrix} 0 & * & 0 \\ * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

ולכן

$$\chi(g)=\sum\psi(g_i^{-1}gg_i)$$

כאשר אם $g_i^{-1}gg_i\notin H$ מסמנים $T(g_i^{-1}gg_i):=0$

הערה:

במטריצה A הנ"ל, בכל שורה i ובכל עמודה j

יש איבר יחיד $\neq 0$

$$\chi(1_G)=[G:H]\cdot\psi(1_H)$$

משפט: (הדדיות פרוביניוס = Frobenius reciprocity)

אם H תת-חבורה של G, ψ קרקטר של H, χ קרקטר של G, אז:

$$\langle \chi\downarrow^G_H, \psi\rangle_H = \langle \chi, \psi\uparrow^G_H\rangle_G$$

הצגות של S_n:

מה הן ההצגות האי-פריקות של S_n?

מס' הקרקטרים האי-פריקים של S_n =

מס' מחלקות הצמידות ב-S_n =

מס' החלוקות של n.

(כי מחלקת צמידות מתאימה לסיכום מחזורים שהוא חלוקה של n)

הערה:

$$|S_n| = n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

$p(n) \sim e^{c\sqrt{n}}$ מס' החלוקות של n.

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \prod_{\substack{p\\ \text{ראשוני}}} \frac{1}{1-x^p}$$

לכל חלוקה $n \vdash \lambda$ מתאים קרקטר אי-פריק χ_λ.

(ראינו **בנייה** מפורשת של ההצגות המתאימות.

אחר כך ראינו גם איך לחשב ישירות את ערכי הקרקטר.

תהי $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ חלוקה.

(נתאים לה תת-חבורת Young של S_n:

$$S_\lambda = S_{A_1} \times \dots \times S_{A_k} \cong S_{\lambda_1} \times \dots \times S_{\lambda_k}$$

כאשר

$$A_i = \{\Gamma_{i-1}+1, \Gamma_{i-2}+2, \dots, \Gamma_{i-1}+\lambda_i\}$$

$$\Gamma_{i-1} := \lambda_1 + \dots + \lambda_{i-1}$$ (S_{A_i} = חבורת התמורות על הקבוצה A_i)

<u>דוגמא:</u> $\lambda = (4,3,1) \vdash 8$

$$S_\lambda = S_{\{1,2,3,4\}} \times S_{\{5,6,7\}} \times S_{\{8\}} \cong S_4 \times S_3 \times S_1$$

נתבונן בהצגה המושרית $1\uparrow_{S_\lambda}^{S_n}$ כאשר 1 הינו ההצגה הטריוויאלית של S_λ.

נסמן ב M^λ את ה-S_n-מודול המתאים.

$$\dim M^\lambda = [S_n : S_\lambda]\cdot 1 = \binom{n}{\lambda_1 \cdots \lambda_k} = \frac{n!}{\lambda_1! \cdots \lambda_k!}$$ (מקדם מולטינומי)

נתאר בניה <u>קומבינטורית</u> של M^λ.

<u>הגדרה:</u> טבלת יאנג (<u>לאו דווקא</u> <u>סטנדרטית</u>) היא מילוי של הדיאגרמה $[\lambda]$ ע"י המספרים $1,\dots,n$ כל אחד פעם אחת.

<u>דוגמא:</u> $\lambda=(3,2)$ $\quad t = \begin{matrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{matrix}$

<u>הגדרה:</u>
שתי טבלאות יאנג מצורה λ הן <u>שקולות שורה</u> אם יש להן אותן קבוצות איברים בשורות המתאימות (אולי בסדר אחר).

<u>דוגמא:</u> $\begin{matrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 2 & 4 & 3 \\ 5 & 1 \end{matrix}$

מחלקות השקילות של טבלת יאנג t תקראנה <u>הטבלואיד</u> (tabloid) $\{t\}$.

<u>דוגמא:</u>

$$\{t\} = \begin{matrix} \{1\,4\} \\ \{3\,2\} \end{matrix} = \begin{matrix} \overline{1\;4} \\ \overline{3\;2} \end{matrix} := \left\{ \begin{matrix} 1\,4 \\ 3\,2 \end{matrix}, \begin{matrix} 4\,1 \\ 3\,2 \end{matrix}, \begin{matrix} 1\,4 \\ 2\,3 \end{matrix}, \begin{matrix} 4\,1 \\ 2\,3 \end{matrix} \right\}$$

רק סימון Sagan בספרו.

הערה:

טבלואיד הוא בעצם חלוקה של הקבוצה $[n]=\{1,\dots,n\}$
לסדרה של k בלוקים זרים ומשלימים $(B_1,\dots,B_k)$
כאשר כל בלוק B_i הוא קבוצת האיברים
בשורה i, כמובן $|B_i|=\lambda_i$.

בדוגמה לעיל:

$$\{t\} \longleftrightarrow (B_1,B_2)=(\{1,4\},\{2,3\})$$

S_n פועלת באופן טבעי על טבלואידים
(פועלת על המספרים הרשומים בטבלה):

$$\sigma=(12) \qquad \begin{matrix}1&4\\3&2\end{matrix} \overset{\sigma}{\longmapsto} \begin{matrix}2&4\\3&1\end{matrix}$$

וזה מגדיר פעולה של S_n על טבלואידים:

$$\begin{matrix}\{14\}\\\{32\}\end{matrix} \overset{\sigma}{\longmapsto} \begin{matrix}\{24\}\\\{31\}\end{matrix}$$

הפעולה הזאת מגדירה S_n - מודול M.
ניתן לראות שהקרקטר שלה הוא $1\uparrow_{S_\lambda}^{S_n}$.

דוגמאות

(1) $\lambda=(n)$: טבלואיד יחיד $\{t\}=\{1\dots n\}$
הצגה טריוויאלית $\chi(\sigma)=1 \quad (\forall\sigma\in S_n)$

(2) $\lambda=(1^n)=\underbrace{(1,\dots,1)}_{n\text{ פעמים}}$: $n!$ טבלואידים (כל שורה באורך 1)
(= תמורות)

הצגה רגולרית.

$$\chi(\sigma)=\begin{cases} n! & , \sigma=1 \\ 0 & , \text{אחרת} \end{cases}$$

(2) $\lambda = (n-1, 1)$: $\{t\}$ $\{1,\dots,\hat{i},\dots,n\}$ ($\hat{i}$: i חסר), $\{i\}$

(n טבלואידים).

פעולת S_n על טבלואידים = פעולת S_n
הרגילה על הקבוצה $[n]$.
זו ההצגה הבסיסית של S_n.

$\chi(\sigma) =$ מס' נקודות השבת
(מחזורים באורך 1)
של σ