החבורה הסימטרית — הרצאה מס' 11

תזכורת והשלמה: הצגות של חבורה סופית

הערה "קטנה":

כשדיברנו על הצגות של חבורה סופית G, רצינו שהשדה F יהיה "גדול מספיק", והתפשרנו על $F=\mathbb{C}$.

מה בעצם נדרש?

נסמן: $n:=|G|$. כידוע לנו, $g\in G$: $g^n=1_G$ ולכן, אם $T:G\to GL(V)$ הצגה לינארית של G אז

$$T(g)^n = T(g^n) = T(1_G) = I_V$$

ולכן כל ערך עצמי λ של האופרטור $T(g)$ מקיים: $\lambda^n=1$.

כלומר:

λ הוא שורש יחידה מסדר n.

ערך הקרקטר המתאים $\chi(g)=tr\,T(g)$

הוא סכום הע"ע של $T(g)$,

ובפרט הוא סכום של d שורשי יחידה מסדר n ($d=\dim V$ ממד ההצגה).

מסקנות:

(*) כל ערך של קרקטר של חבורה סופית הוא שלם אלגברי (ולכן אם הוא גם רציונלי אז הוא שלם).

(*) כדי לקבל את "כל ההצגות", מספיק לדרוש ש-F יכיל את שורשי היחידה מסדר $|G|=n$.

(*) ספציפית, עבור S_n, מתברר שמספיק לקחת $F=\mathbb{Q}$ כדי לקבל את כל ההצגות.

לעומת זאת, עבור A_3 (לפי תרגיל בית 4), לא כל ערכי הקרקטרים ממשיים ואכן צריך להחליף $\mathbb{F}=\mathbb{Q}[\sqrt{-3}]$.

<u>הערה "גדולה"</u>

ראינו כמה נקודות מבט שונות על המושג "הצגה לינארית" של חבורה סופית G (או של אלגברת החבורה $\mathbb{C}[G]$):

① מודול (שמאלי) V מעל האלגברה $\mathbb{C}[G]$.

② הומומורפיזם של חבורות $T: G \to GL(V)$

③ קרקטר $\chi: G \to \mathbb{C}$, $[\chi(g) = tr\, T(g)]$

כלומר: פונקציית מחלקה (= קבועה על מחלקות צמידות), שהיא גם צירוף לינארי של הקרקטרים האי-פריקים עם מקדמים שלמים אי שליליים.

כמו כן, ראינו שמספר הקרקטרים האי-פריקים הוא מספר מחלקות הצמידות ב-G, והם מהווים <u>בסיס</u> למרחב פונקציות המחלקה של G. יתר על כן, הגדרנו מכפלה פנימית על מרחב זה:

$$\langle \chi_1, \chi_2 \rangle := \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \chi_1(g) \cdot \overline{\chi_2(g)}$$

שעבורה הקרקטרים האי-פריקים הם <u>בסיס אורתונורמלי</u>.

בפרט, ראינו שהקרקטר χ_{reg} של ההצגה הרגולרית ($V=\mathbb{C}[G]$ עם בסיס G: $T(g)(\tilde{g}) = g\tilde{g}$)

איבר בסיס

<u>מקיים</u>:

$$\chi_{reg}(g) = |G|\, \delta_{g,1_G}$$

וכן כצירוף כרקטרים אי-פריקים:

$$\chi_{reg} = \sum_i d_i \chi_i$$

כאשר $d_i=\chi_i(1_G)$ הוא ממד ההצגה המתאימה ל χ_i.
כמסקנה קלה, ע"י חישוב $\langle \chi_{reg},\chi_{reg} \rangle$ בשני דרכים:

$$\sum_i d_i^2 = |G|$$

נעשה סטייה, בקצרה, ונדבר על נושא נוסף: אידמפוטנטים.

הגדרה: תהי A אלגברה עם 1 מעל השדה $\mathbb{F}$.
(אצלנו תמיד נקח $A=\mathbb{C}[G]$).

א) איבר $e\in A$ יקרא אידמפוטנט אם $e^2=e$.
(ומכאן $e^n=e$ לכל n). דוגמאות — $e=0$, $e=1$.

ב) אידמפוטנטים e_1, e_2 יקראו ניצבים אם $0=e_1e_2=e_2e_1$.

ג) מערכת שלמה של אידמפוטנטים ניצבים היא סדרה $\{e_1,\dots,e_k\}$ של אידמפוטנטים ניצבים בזוגות
(כלומר $e_ie_j=\delta_{ij}e_i$) כך ש: $1=e_1+\dots+e_k$.

ד) אידמפוטנט e יקרא פרימיטיבי אם $e\neq 0$ ולא ניתן לכתוב כסכום $e=e_1+e_2$ של אידמפוטנטים ניצבים שונים מאפס.

הערה:
אם e_1,e_2 אידמפוטנטים ניצבים, אז גם e_1+e_2 אידמפוטנט.

ה) אידמפוטנט e נקרא מרכזי אם הוא במרכז $Z(A)$, כלומר מתחלף עם כל איברי A.

ו) אידמפוטנט מרכזי e נקרא פרימיטיבי מרכזי (centrally primitive)

טענה: (גם לזה ניסוח מדויק.)
(לפחות עבור $A=\mathbb{C}[G]$)

א) ישנה התאמה חח"ע
אידמפוטנטים $\leftrightarrow$ אידיאלים שמאליים ב-A.
לכל: $e \leftrightarrow Ae$.

ב) אידמפוטנט פרימיטיבי $\leftrightarrow$ אידיאל שמאלי אי-פריק.

ג) מערכת שלמה של אידמפוטנטים פרימיטיביים ניצבים $\leftrightarrow$
פירוק $A=\bigoplus_i Ae_i$ של A לסכום ישר
של אידיאלים שמאליים אי-פריקים.

ד) אידמפוטנט מרכזי $\leftrightarrow$ אידיאל דו-צדדי
$e \longleftrightarrow AeA$

ה) אידמפוטנט פרימיטיבי מרכזי $\leftrightarrow$ אידיאל דו-צדדי
אי-פריק (=פשוט).

$\cong$ אלגברת מטריצות $\mathbb{C}^{d\times d}$

ו) מערכת שלמה של אידמפוטנטים פרימיטיביים מרכזיים $\Leftrightarrow$
פירוק $A=\bigoplus Ae_iA$ של A לסכום ישר
של אלגברות מטריצות $\mathbb{C}^{d_i\times d_i}$

Scanned by CamScanner

<u>מה הקשר לנקודות השבת הקודמות:</u>

כבר אמרנו, לגבי הכרקטר הרגולרי:

$$\chi_{reg} = \sum_i d_i \chi_i$$

סכום על כל הכרקטרים האי-פריקים של G.
במונחים של מודולים, זה אומר:

$$\mathbb{C}[G] \cong \bigoplus_i d_i V_i$$

סכום ישר של מודולים אי-פריקים V_i,
כשכל אחד מופיע בריבוי $d_i = \dim V_i$,
ומאחר ש- $\dim(d_i V_i) = d_i^2$ ובפרט $d_i V_i$ (בהצגה המתא׳
לאלגברת המטריצות $\mathbb{C}^{d_i \times d_i}$, כלומר:

$$\mathbb{C}[G] \cong \bigoplus_i \mathbb{C}^{d_i \times d_i}$$

הנ"ל סכום ישר של d_i אידאלים <u>שמאליים</u>
אי-פריקים, שכל אחד מהם מתאים לאידמפוטנט
פרימיטיבי (פירוק זה <u>אינו</u> יחיד).

<u>דוגמה:</u> $G = S_3$.

בתרגול 4 שאלה 2, מצאנו את טבלת הקרקטרים האי-פריקים של S_3:

קרקטר \ מחלקות צמידות	(1³)	(2,1)	(3)
	1	3	2
טריוויאלי χ_1	1	1	1
סימן χ_2	1	-1	1
χ_3	2	0 (x)	-1 (y)

את χ_3 מצאנו ע"י תנאי האורתוגונליות:

$\langle \chi_1, \chi_3 \rangle$

$\langle \chi_2, \chi_3 \rangle$

כמו כן $\chi_3(1^3) = 2$ מכיוון ש:

$$|S_3| = 6 = 1^2 + 1^2 + 2^2$$

$d_1 = 1$, $d_2 = 1$, $d_3 = 2$

יש לזכור להתחשב <u>במספר</u> האיברים בכל מחלקת צמידות ~~[illegible]~~ ראשונים ו- [illegible] האורתוגונליות כולה

$$\langle \chi_1, \chi_3 \rangle = 1\cdot(1\cdot 2) + 3(1\cdot x) + 2\cdot(1\cdot y) = 0 \Rightarrow 2+3x+2y=0$$

$$\langle \chi_2, \chi_3 \rangle = 1\cdot(1\cdot 2) + 3((-1)\cdot x) + 2(1\cdot y) = 0 \Rightarrow 2-3x+2y=0$$

$\Downarrow$

$4 + 4y = 0$

$\Downarrow$

$\boxed{y = -1}$

$\Downarrow$ (נציב במשוואה הראשונה.)

$2 + 3\cdot x - 2 = 0$

$\Downarrow$

$\boxed{x = 0}$

לפי הטענה, יש ב $\mathbb{C}[S_3]$ מערכת שלמה
של 3 אידמפוטנטים פרימיטיביים מרכזיים.
נציג אותם:

$$e_1 = \frac{1}{|S_3|}\sum_{g\in S_3} g = \frac{1}{6}\Big(1+(12)+(13)+(23)+(123)+(132)\Big)$$

$$e_2 = \frac{1}{|S_3|}\sum_{\sigma\in S_3} \mathrm{sign}(\sigma)\sigma = \frac{1}{6}\Big(1-(12)-(13)-(23)+(123)+(132)\Big)$$

$$e_3 = \frac{1}{6}\Big(4\cdot 1 - 2(123) - 2(132)\Big) = \frac{\chi_3(1)}{|S_3|}\sum_{\sigma\in S_3}\chi_3(\sigma)\sigma$$

תרגיל: (א) בדקו ש e_1, e_2, e_3 אכן מקיימים
מה שטענו לגביהם.

(ב) נסחו טענה כללית.

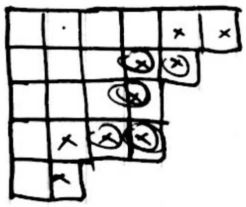
הצגות אי-פריקות של S_n

כרקטרים:

הכרקטרים האי-פריקים של S_n מתאימים לחלוקות $\lambda \vdash n$.
יהי χ^λ הכרקטר המתאים לחלוקה $\lambda \vdash n$.
נבנה עתה נוסחה מפורשת
(נוסחת Murnaghan–Nakayama)
עבור ערך הכרקטר $\chi^\lambda(\sigma)$ לכל $\sigma \in S_n$.

הגדרה: תהי λ חלוקה, $[\lambda]$ הדיאגרמה המתאימה.
כל ר"ג (רצועה גבולית, border strip, ר"ג שפה, rim hook) באורך k ב-$[\lambda]$
היא קבוצה של k תאים סמוכים ב"שפה"
של $[\lambda]$ שהורדתה מ-$[\lambda]$ משאירה דיאגרמה
של חלוקה.

דוגמא:



$[\lambda]$

"הבניה" של $[\lambda]$ = משבצות
שמימין המשבצת בדרום-מזרח
גם הן ב-$[\lambda]$.
השפה של $[\lambda]$ = משבצות
ב-$[\lambda]$ שאינן בניה.

x = שפה
ⓧ = לא ר"ג
Ⓧ כן ר"ג באורך 5

כי הדיאגרמה שנשארת
לאחר הסרת אברים
אלו איננה דיאגרמה חוקית.

הערה:
ישנה התאמה חח"ע בין ר"ג הוקים לתאים של $[\lambda]$:
לכל תא $c \in [\lambda]$, נסמן ב-ר"ג H_c (hook)
(אין קשר לנוסחת אורכי הוקים) "הוק" אותו בכיוון
דרום מזרח (על) של השפה של $[\lambda]$

מסקנות:

(*) מס' כלי הווים ב [λ] הוא |λ|=n.

(*) אורכי כלי הווים הם בדיוק h_{ij}, אורכי הווים של תאים ב [λ].

(rim hook tableau)

<u>הגדרה</u>: טבלת וו' שפה (טוש) היא מילוי של הדיאגרמה [λ] במספרים 1,2,... (עם ריבוי) כך ש:

(*) הווים המכילים 1 הם וו שפה ב-[λ].

(*) ברקורסיה: אם נשמיט מ [λ] את הווים המכילים 1, ונחליף 1 בכל מספר בכלל - נקבל טוש

<u>דוגמא</u>: שתי בניות אפשריות:

4	4	4	2
3	3	2	2
3	1	1	
3	1		

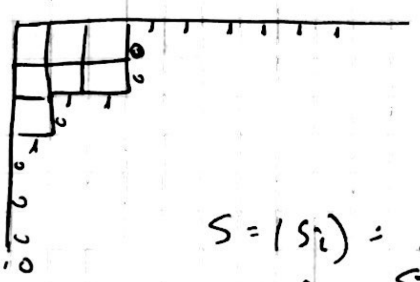
5	3	3	2
5	3	1	1
4	1	1	
4	1		

<u>פרטיציות וספרות</u>:

ניתן לתאר את דיאגרמה [λ] (כלומר את חלוקה λ) ע"י סדרת 0,1 (אותה להשוות).

<u>דוגמא</u>:

$\lambda = (3,3,1)$



ציר

$S = (S_i) : \ldots 0010110011 \ldots$

0   1

$S_i \in \{0,1\}$

$\forall i \in \mathbb{Z}$

הגבלה

מתחיל ב ∞ אפסים

ומסתיים ב ∞ אחדים

רצינו ווקטו $\tilde{o}$ ... $1100\ldots$

כלומר

$\lambda=()$
הדיאגרמה הריקה.

תרגיל:

יש אינדקס i_0 יחיד שעבורו

$$\#\{i>i_0 \mid s_i=0\} = \#\{i\le i_0 \mid s_i=1\}$$

עובדות

תהי $s=(s_i)$ סדרת ה-0-1 המתאימה לחלוקה λ.

(*) שורה ב-$[\lambda]$ $\longleftrightarrow$ איבר $s_i=0$ (כולל שורות ריקות בסוף?)

(*) עמודה ב-$[\lambda]$ $\longleftrightarrow$ איבר $s_i=1$ (כולל עמודות ריקות)

(*) תא ב-$[\lambda]$ $\longleftrightarrow$ זוג אינדקסים $i<j$ כך ש- $s_i=1$, $s_j=0$

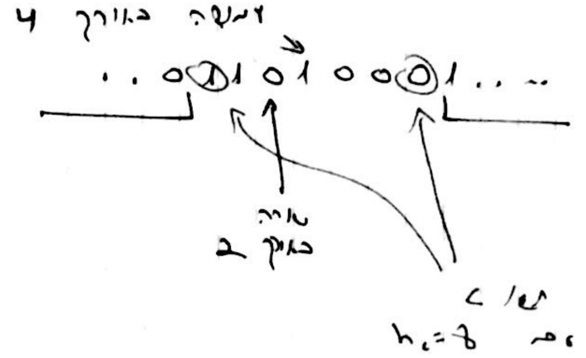
(*) אורך שורה = מס' ה-1-ים לפני (כלומר משמאל) ה-0 הנדון

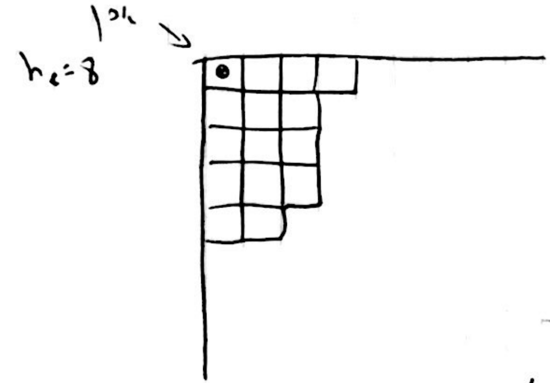
(*) אורך עמודה = מס' ה-0-ים אחרי ה-1 הנדון.

(*) גודל הטבלה = מס' התאים = $\#\{(i,j) \mid i<j, s_i=1, s_j=0\}$

(*) אורך וו h_c = המרחק $j-i$ (כלומר התא c מתאים ל- $s_i=1$, $s_j=0$).

דוגמה:





$\lambda=(4,3,3,3,2)$

<u>הורדת רצ שפה = החלפה</u>

$1\cdots 0 \to 0\cdots 1$

טס = סדרת החלפות כנ"ל המביאה את $[\lambda]$ ל-$[\emptyset]$.

משפט (נוסחת Murnaghan-Nakayama)

$$\boxed{\chi^\lambda(\mu) = \sum_{T\in RHT_\mu(\lambda)} \prod (-1)^{height(h)-1}}$$

χ^λ = הקרקטר האי-פריק המתאים לחלוקה λ של n

μ = הרכב (composition) של n, כלומר $\mu=(\mu_1,\dots,\mu_k)$ כאשר μ_i שלמים חיוביים (לאו דווקא יורדים חלש) $\mu_1+\dots+\mu_k=n$. למשל: $\mu=(3,1,3)$.

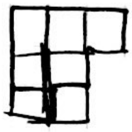
$\chi^\lambda(\mu)$ = ערך הקרקטר χ^λ של איבר $\sigma\in S_n$ שטיפוס המחזורים שלו הוא μ (עד כדי סדר).

$RHT_\mu(\lambda)$ = סדרות הוקים מ-$[\lambda]$ ותואמות μ,
<u>כלומר:</u> μ_i = מס' הריבועים ב-$[\lambda]$ המסומנים ב-i.

$h \in T$: h הוא וו-שפה של T.

$height(h) =$ מס׳ השורות השונות ש h תופס.

דוגמא :



$\lambda = (3,2,1)$ $\quad n=7$

$\mu = (1,4,2)$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 2 & 1 \\ \hline 3 & 2 \\ \cline{1-2} 2 & 2 \\ \cline{1-2} \end{array} \qquad (-1)^0 (-1)^2 (-1)^1 = -1$$

$\mu = (2,1,4)$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 2 \\ \hline 3 & 1 \\ \cline{1-2} 3 & 1 \\ \cline{1-2} \end{array} \quad \text{או} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 3 & 3 \\ \hline 3 & 1 \\ \cline{1-2} 2 & 1 \\ \cline{1-2} \end{array} \quad \text{או} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 3 \\ \hline 3 & 2 \\ \cline{1-2} 1 & 1 \\ \cline{1-2} \end{array} \qquad (-1)$$

$$(-1)^{1+0+2} + (-1)^{1+0+1} + (-1)^{0+0+1} = (-1) + (-1) + (-1) = -1$$