הצגות של S_n ופונקציות סימטריות

ראינו כבר נוסחה לחישוב ערכי הקרקטרים האי-פריקים של S_n [Murnaghan-Nakayama] ובעצם, לדבר על ההצגות האי-פריקות.
היום נמשיך לדבר על ההצגות, ונקשר אותן לפונקציות סימטריות.

בתכנית:

1. המשך תיאור הגישה הקלאסית לבניית ההצגות האי-פריקות.
2. הערות על גישה מודרנית להצגות הנ"ל.
3. הקשר לפונקציות סימטריות.

---

1. בניית הצגות אי-פריקות של S_n (הגישה הקלאסית).

תזכורת:

לכל חלוקה $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_k) \vdash n$, הגדרנו את M^λ, מרחב וקטורי (מעל $\mathbb{C}$) שבסיסו הוא אוסף הטבלואידים מצורה λ.

(טבלה מצורה λ היא מילוי של הדיאגרמה $[\lambda]$ במספרים $1,\ldots,n$, כל אחד פעם אחת (בלי הגבלות נוספות). טבלואיד מצורה λ הוא מחלקת שקילות של טבלאות, כאשר שתי טבלאות מצורה λ הן שקולות אם יש להן אותה קבוצת איברים בכל שורה.

למשל, הטבלואיד:

$$\begin{matrix}1&2\\3&4\\5\end{matrix} = \left\{ \begin{matrix}1&2\\3&4\\5\end{matrix} \quad \begin{matrix}1&2\\4&3\\5\end{matrix} \quad \begin{matrix}2&1\\3&4\\5\end{matrix} \quad \begin{matrix}2&1\\4&3\\5\end{matrix} \right\}$$

- S_n פועל באופן טבעי על קבוצת כל הטבלואידים מצורה נתונה λ!

למשל:

$$(12)\cdot\begin{matrix}3&1&5\\2&4\end{matrix} = \begin{matrix}3&2&5\\1&4\end{matrix}$$

ברור שאם $t_1 \sim t_2$, $\pi \in S_n$ אז $\pi(t_1) = \pi(t_2)$.

ולכן S_n פועל על טבלואידים (=מחלקות השקילות).

כלומר: יש ל-S_n פעולת תמורה על הבסיס של M^λ.

<u>מבט אחר על פעולה זו:</u>

אפשר לתאר טבלואיד לא כמחלקת שקילות של טבלאות אלא כ<u>סכום</u> הטבלאות השקולות.

(אבר במרחב וקטורי שבסיסו הוא קבוצת כל הטבלאות מצורה λ). למשל:

$$\begin{matrix}1&3\\4&5\\2\end{matrix} = \begin{matrix}1&3\\4&5\\2\end{matrix} + \begin{matrix}3&1\\4&5\\2\end{matrix} + \begin{matrix}1&3\\5&4\\2\end{matrix} + \begin{matrix}3&1\\4&5\\2\end{matrix}$$

$$= \left[id + (13) + (45) + (13)(45) \right] \cdot \begin{matrix}1&3\\4&5\\2\end{matrix}$$

קבוצת התמורות $R_t = \{id, (13), (45), (13)(45)\}$

היא תת-חבורה של S_n, הנקראת <u>חבורת השורה</u> של טבלה t: אלו התמורות ב-S_n השומרות על קבוצות המספרים בכל שורה של t.

הפולינום $\{t\}$ ניתן לכתיבה בצורה $\{t\}=\overline{R}_t\cdot t$

כאשר
$$\overline{R}_t = \sum_{\pi\in R_t}\pi \in \mathbb{C}[S_n]$$

t = טבלה בצורה λ.

$\{t\}$ = הפולינום המתאים (כפונים של טבלאות).

מהי החבורה R_t? ברור ש-

$$R_t = S_{r_1}\times S_{r_2}\times\cdots\times S_{r_k}$$

כאשר r_i היא קבוצת הערכים בשורה i של t.

למשל:

$$t=\begin{smallmatrix}1&3\\2&5\\4&\end{smallmatrix} \Rightarrow R_t = S_{\{1,3\}}\times S_{\{2,5\}}\times S_{\{4\}}$$

וכן את החבורה במידה לחבורת החבורה יאנג

$$S_\lambda = S_{(2,2,1)} = S_{\{1,2\}}\times S_{\{3,4\}}\times S_{\{5\}} \leq S_5$$

הסבר:

אם t_0 היא "הטבלה הבסיסית" מצורה λ,

המספרים בה רשומים $1,\dots,n$ בצורה:

(למשל: $\begin{smallmatrix}1&2\\3&4\\5&\end{smallmatrix}$)

ואם $\pi_t\in S_n$ מוגדרת ע"י $\pi_t(t_0)=t$

אז
$$R_{t_0}=S_\lambda$$

$$R_t=\pi_t R_{t_0}\pi_t^{-1}$$

מסקנה: אם t_1,t_2 שתי טבלאות מצורה λ,

אז קיימת $\pi\in S_n$ יחידה כך ש: $t_2=\pi(t_1)$,

ומתקיים:
$$R_{t_2}=\pi R_{t_1}\pi^{-1}$$

מראה נוסף להראות, שוב, שפעולת S_n
על טבלואידים:

$\sigma\{t\} := \{\sigma(t)\}$ ($\sigma \in S_n$, t טבלה)

מוגדרת היטב, כי אם $\{t_1\}=\{t_2\}$ אז, עבור $\pi \in S_n$
המקיים: $t_2 = \pi(t_1)$:

$$\{\sigma(t_2)\} = \bar{R}_{\sigma(t_2)}\cdot \sigma(t_2) = \bar{R}_{\sigma\pi(t_1)}\cdot \sigma\pi(t_1)$$

ולכן

$$\sigma(t_2) = \sigma\pi(t_1) = \sigma\pi\sigma^{-1}(t_1)$$

$$\Rightarrow R_{\sigma(t_2)} = \sigma\pi\sigma^{-1} R_{\sigma(t_1)} (\sigma\pi\sigma^{-1})^{-1} = \sigma\pi\sigma^{-1} R_{\sigma(t_1)} \sigma\pi^{-1}\sigma^{-1}$$

$$\{\sigma(t_2)\} = \bar{R}_{\sigma(t_2)}\cdot\sigma(t_2) = \sigma\pi\sigma^{-1}\,\bar{R}_{\sigma(t_1)}\underbrace{\sigma\pi^{-1}\sigma^{-1}\cdot\sigma(t_2)}_{t_1} =$$

$$= \underbrace{\sigma\pi\sigma^{-1}}_{\in \bar{R}_{\sigma(t_1)}}\bar{R}_{\sigma(t_1)}\cdot\sigma(t_1) = \bar{R}_{\sigma(t_1)}\cdot\sigma(t_1) = \{\sigma(t_1)\}$$

עתה נתבונן, עבור טבלה t מצורה λ,
בקבוצת כל התמורות $\pi \in S_n$ השומרות על קבוצות
הערכים בכל עמודה של t. זו תת-חבורה
של S_n, המסומנת C_t (חבורת העמודה של t).
נגדיר:

$$\bar{C}_t = \sum_{\pi \in C_t} \operatorname{sign}(\pi)\,\pi \in \mathbb{C}[S_n]$$

סכום איברי C_t עם סימנים.

Scanned by CamScanner

לכל טבלה t מגודל λ נגדיר את
<u>הפוליטבלואיד</u> המתאים

$$e_t := \overline{C_t} \cdot \{t\} = \overline{C_t} \cdot \overline{R_t} \cdot t$$

פולי - טבלואיד

<u>דוגמא</u>: $\lambda = (2,1) \vdash 3$

$$\boxed{t_1 = \begin{matrix}1 & 2\\ 3 & \end{matrix}}$$

$$e_t = \overline{C_t} \cdot \overline{R_t} \cdot t = \underbrace{[id - (13)]}_{\overline{C_t}} \underbrace{[id + (12)]}_{\overline{R_t}} \cdot \begin{matrix}1 & 2\\ 3 & \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix}1 & 2\\ 3 & \end{matrix} + \begin{matrix}2 & 1\\ 3 & \end{matrix} - \begin{matrix}3 & 2\\ 1 & \end{matrix} - \begin{matrix}2 & 3\\ 1 & \end{matrix}$$

$$\boxed{t_2 = \begin{matrix}2 & 1\\ 3 & \end{matrix}}$$

$$e_t = \overline{C_t} \cdot \overline{R_t} \cdot t = [id - (23)] [id + (12)] \cdot \begin{matrix}2 & 1\\ 3 & \end{matrix} =$$

$$= \begin{matrix}2 & 1\\ 3 & \end{matrix} + \begin{matrix}1 & 2\\ 3 & \end{matrix} - \begin{matrix}3 & 1\\ 2 & \end{matrix} - \begin{matrix}1 & 3\\ 2 & \end{matrix}$$

$$\boxed{t_3 = \begin{matrix}1 & 3\\ 2 & \end{matrix}}$$

$$e_{t_3} = \overline{C_{t_3}} \cdot \overline{R_{t_3}} \cdot t_3 = [id - (12)] \cdot [id + (13)] \cdot \begin{matrix}1 & 3\\ 2 & \end{matrix} =$$

$$= \begin{matrix}1 & 3\\ 2 & \end{matrix} + \begin{matrix}3 & 1\\ 2 & \end{matrix} - \begin{matrix}2 & 3\\ 1 & \end{matrix} - \begin{matrix}3 & 2\\ 1 & \end{matrix}$$

<u>הערה</u>:

$e_{t_1}, e_{t_2}, e_{t_3}$ <u>תלויים לינארית</u>:

$$\boxed{e_{t_2} = e_{t_1} - e_{t_3}}$$

<u>ניקח עוד טבלה</u>:

$$t_4 = \begin{matrix}3 & 1\\ 2 & \end{matrix}$$

$$e_{t_4} = \overline{C_{t_4}} \overline{R_{t_4}} \cdot t_4 = [(id) - (23)] [(id) + (13)] \cdot \begin{matrix}3 & 1\\ 2 & \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix}3 & 1\\ 2 & \end{matrix} + \begin{matrix}1 & 3\\ 2 & \end{matrix} - \begin{matrix}2 & 1\\ 3 & \end{matrix} - \begin{matrix}1 & 2\\ 3 & \end{matrix} = - e_{t_2} = - e_{t_1} + e_{t_3}$$

<u>סימון</u>: מודול שפכט (Specht הגרמני)
ל-λ, S^λ הוא המרחב הוקטורי
הנפרש ע״י $\{e_t \mid t \text{ טבלה-}\lambda\}$

<u>משפט</u>:

בסיס ל-S^λ הוא $\{e_t \mid t \text{ טבלה-}\lambda \text{ סטנדרטית}\}$

(סטנדרטית = בשורות עולה מימין לשמאל ובעמודות עולה מלמעלה למטה).

בפרט $\dim(S^\lambda) = f^\lambda$.

מס׳ טבלאות יאנג הסטנדרטיות מצורה λ.

S^λ הוא כמובן <u>תת-מרחב</u> של M^λ.

לא קשה להראות:

$$e_{\pi(t)} = \pi(e_t) \qquad (\forall \pi\in S_n,\ t \text{ טבלה-}\lambda)$$

<u>כלומר</u>: מוגדרת הצגה פעולה של S_n על S^λ (פעולה <u>לינארית</u>, לא פעולת תמורה).

<u>משפט</u>

(א) לכל $\lambda\vdash n$, S^λ הוא מודול <u>אי-פריק</u> של S_n.

(ב) $\{S^\lambda, \lambda\vdash n\}$ הוא אוסף <u>כל</u> ההצגות האי-פריקות של S_n (מעל $\mathbb{C}$), בלי חזרות.

<u>שאלה</u>

מה הקשר בין M^λ ל S^λ?

כמובן, S^λ הוא תת-מודול אי-פריק של M^λ.

M^λ הוא סכום ישר של תת-מודולים אי-פריקים, שאחד מהם
כמובן, איזומורפי ל S^μ עבור $\mu\vdash n$ מתאימה.

אפשר להוכיח :

$$M^\mu \cong \bigoplus_{\lambda \vdash n} K_{\lambda\mu} S^\lambda$$

כאשר $K_{\lambda\mu}$ הם שלמים אי-שליליים,
הנקראים מספרי Kostka.
מסתבר שיש תיאור קומבינטורי של $K_{\lambda\mu}$.

תזכורת :

טבלה סטנדרטית למחצה (Semistandard (Young tableau))
מצורה λ היא מילוי של הדיאגרמה $[\lambda]$ ע"י
מספרים טבעיים כך שהמספרים בכל שורה עולים
חלש (משמאל לימין) והמספרים בכל עמודה עולים חזק
(מלמעלה למטה).

אם t טבלה"ס מצורה λ : $t \in SSYT(\lambda)$
נסמן, לכל i טבעי :
$m_i(t)$ = מס' המופעים של i בטבלה t.
הסדרה

$$m = (m_1(t), m_2(t), \ldots)$$

נקראת הטיפוס של t : $m = type(t)$

משפט :

$$M^\mu \cong \bigoplus_{\lambda \vdash n} K_{\lambda\mu} S^\lambda$$

כאשר לכל שתי חלוקות $\lambda, \mu \vdash n$,
$K_{\lambda\mu}$ הוא מס' הטבלה"ס מצורה λ וטיפוס μ.

<u>דוגמה</u>:

ניקח

$\lambda=(3,2) \vdash 5$

$\mu=(2,2,1) \vdash 5$

$K_{\lambda\mu}$ הוא מס' הטבל' מצורה $\lambda=(3,2)$

המילוי במספרים: $1^2 2^2 3^1 = 1,1,2,2,3$

$$\begin{array}{lll} 1&1&2\\ 2&3& \end{array} \qquad \begin{array}{lll} 1&1&3\\ 2&2& \end{array}$$

$K_{\lambda\mu}=2$

<u>ואם ניקח</u>: $\underline{\lambda=\mu=(3,2)}$:

$$\begin{array}{lll} 1&1&1\\ 2&2& \end{array}$$

$K_{\lambda\lambda}=1$ (וזה נכון תמיד)

(הריבוי של s^λ ב m^λ הוא 1)

<u>אם ניקח</u>:

$\lambda=(3,2)$

$\mu=(4,1)$

$K_{\lambda\mu}=0$

<u>שאלה</u>: מתי $K_{\lambda\mu} \neq 0$?

<u>תשובה</u>: אם ורק אם

$$\lambda_1+\dots+\lambda_i \geq \mu_1+\dots+\mu_i \qquad (\forall i \geq 1)$$

(כמובן, ל-i גדול מספיק יש שוויון כי $\lambda,\mu \vdash n$)

תנאי זה מגדיר <u>סדר חלקי</u> על קבוצת כל החלוקות של n, $\mu \trianglelefteq \lambda$, הנקרא שליטה

(dominance, או majorization)

② גישה מודרנית לבניית הצגות של S_n:
(Okounkov-Vershik)

בתוך S_n יש תת-חבורה שאיזומורפית ל S_{n-1}: אוסף כל התמורות השומרות על n:

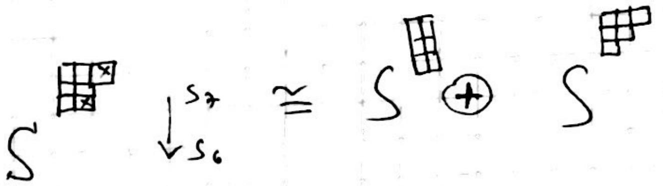
$$\{\pi \in S_n \mid \pi(n)=n\} \cong S_{n-1}$$

ניתן להוכיח, בלי להכיר את הצגות S_n, שהצמצום ל S_{n-1} של כל הצגה אי-פריקה של S_n הוא סכום של הצגות אי-פריקות של S_{n-1}, כל אחד בריבוי ≤ 1 (multiplicity free).

כל מודול אי-פריק כזה (מחובר ישר של המודול המקורי) מוגדר היטב, בגלל העדר הריבוי. נצמצם כל S_{n-1}-מודול אי-פריק ל S_{n-2}, וכו'.
כשנגיע ל S_1, נקבל שהמודול המקורי שלנו הוא סכום של תת-מרחבים חד-ממדיים עם תכונות טובות ביחס לצמצום. (בסיס Gelfand-Tsetlin של ההצגה)
כל תת-מרחב חד-ממדי מתואר ע"י שרשרת.
הצגה א"פ של S_n $\supseteq$ הצגה א"פ של S_{n-1} $\supseteq \ldots \supseteq$ הצגה א"פ של S_1.

מתברר שכל שרשרת כזאת מתאימה לטבלת יאנג סטנדרטית בגודל n, ופעולת הצמצום מתבטאת בכך שמוחקים את המספר n מהטבלה.
הצגות אי-פריקות $\longleftrightarrow$ דיאגרמות $\{\lambda\}$.

דוגמה לצמצום:



$n=7$

פונקציות סימטריות :

יש מילון :

פונקציות סימטריות ⟷ ~~קרקטרים~~ פונקציות מחלקה? של S_n

S_λ פונקציית Schur ⟷ char S^λ

h_λ פונקציה הומוגנית שלמה ⟷ char M^λ
(complete homogeneous function)

$\vdots$