6.3.16

החבורה הסימטרית - הרצאה מס' 2

קרובי משפחה של S_n

ראינו כבר "בת" של S_n - זוהי תת החבורה (מאינדקס 2) A_n.
נראה היום כמה קרובים נוספים (רובם חבורות, חלקם לא בדיוק חבורות).

תמורות מסומנות ומכפלות שזורות

נתבונן בקבוצה $[\pm n]$.
כמובן שכל התמורות של $[\pm n]$ היא החבורה S_{2n}, ונתבונן בקבוצה:

$$B_n = \left\{ \pi \;\middle|\; \begin{array}{l} \pi : [\pm n] \to [\pm n] \ \text{תמורה} \\ \pi(\varepsilon i) = \varepsilon \pi(i) \quad \forall \varepsilon \in [\pm 1] \\ \qquad\qquad\qquad\quad i \in [\pm n] \end{array} \right\}$$

כלומר $\pi(-i) = -\pi(i)$.

איברי B_n נקראים **תמורות מסומנות**. קל לראות ש-B_n היא חבורה לגבי הרכבה (תת-חבורה של S_{2n}).
אפשר להגדיר איבר $\pi \in B_n$ באופן יחיד ע"י סדרת הערכים $\pi(1), \pi(2), \ldots \in [\pm n]$ כמובן.
סדרה $[a_1, \ldots, a_n] \in [\pm n]$ מגדירה איבר של B_n אמ"מ $[|a_1|, \ldots, |a_n|] \in S_n$.
כידוע, $|S_n| = n!$. לכן $|B_n| = 2^n n!$.

מהן מחלקות הצמידות ב-B_n?

אפשר לתאר את B_n גם בדרך אחרת, ע"י מטריצות.

יהי $\mathbb{F}$ שדה כלשהו. לכל תמורה $\pi \in S_n$

נתאים מטריצת תמורה

$$A_\pi = (a_{ij}) \in \mathbb{F}^{n\times n}$$

ע"י :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & i = \pi(j) \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

$\varphi: S_n \to GL_n(\mathbb{F})$ היא הומו' של חבורות לתוך $GL_n(\mathbb{F})$.

כלומר הצגה n-מימדית של S_n.

התמונה $\varphi(S_n)$ היא חבורת מטריצות

התמורה שהן מטריצות 0,1 מסדר $n\times n$

שבהן בכל שורה ובכל עמודה יש אחד יחיד.

φ היא חח"ע ולכן S_n איזומורפית לחבורת

מטריצות התמורה $\varphi(S_n)$.

מה לגבי B_n ?

נבחר שדה $\mathbb{F}$ עם $char(\mathbb{F}) \neq 2$ (למשל $\mathbb{C}$),

ונגדיר באופן דומה

ע"י :

$$\varphi: B_n \longrightarrow GL_n(\mathbb{F})$$

$$\pi \longmapsto (a_{ij}) = \begin{cases} 1 & i = \pi(j) \\ -1 & -i = \pi(j) \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

נראה שבכל הדוגמא הסימון אמור להיות הפוך כלומר $j = \pi(i)$

אז φ מונומורפיזם של חבורות! B_n איזומורפי

לחבורה $\varphi(B_n)$ של מטריצות תמורה מסומנות

למשל :

$$\pi = (\bar{3}\ \ 1\ \ \bar{2}) \in B_n$$

$$\Downarrow$$

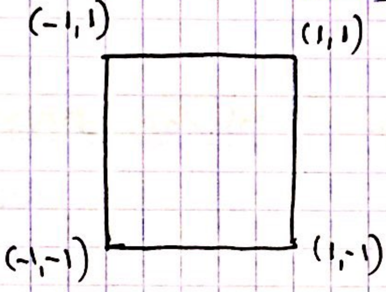
$$\varphi(\pi) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{F})$$

B_n היא חבורת הסימטריה (הגיאומטרית) של
זוג גופים n מימדיים דואליים זה לזה.
הקוביה ה-n-מימדית והגוף הדואלי.
(Cross-polytope).

הקוביה ה-n-מימדית

$$\{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)\in\mathbb{R}^n \mid \varepsilon_i\in\{\pm1\}\}$$

למשל, עבור $n=2$:



יש 2^n קודקודים עבור n כלשהו.
כי אם נתבונן בוקטור $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ עם ε_i רכיב יש 2 אפשרויות: $+1$ או -1. לכן סה"כ 2^n קודקודים שונים.

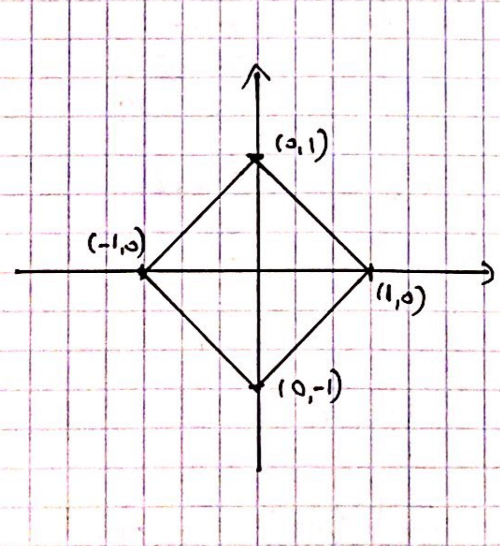
$\Downarrow$

הגוף הדואלי או הקוטבי:

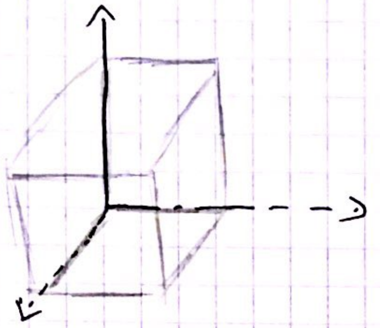
$$C^* = \{x\in\mathbb{R}^n \mid \langle x,y\rangle \le 1 \quad \forall y\in C\}$$

מספיק לדרוש עבור y כלשהו שהוא קודקוד של C.

הדואלי:



n=3 – קוביה



באופן כללי:

2n קודקודים ל

$$\{(0,\dots,0,\varepsilon,0,\dots,0) \mid 1\le i\le n,\ \varepsilon\in\{\pm 1\}\} \subset C^*$$

חבורת הסימטריה הגאומטרית של גוף $C\subseteq\mathbb{R}^n$ היא

$$\mathrm{sym}(C)=\{A\in O_n \mid A(C)\subseteq C\}$$

העתקות לינאריות =
איזומטריות לינאריות של $\mathbb{R}^n$.

אפשר להכליל:

תהי G חבורה כלשהי,
המכפלה השזורה (wreath product = מכפלה הזר)

$G\wr S_n$ היא חבורת המטריצות

$$A(\pi,g_1,\dots,g_n)=(a_{ij})\in GL_n(\mathbb{F}G)$$

חוג החבורה

כאשר
$$a_{ij}=\begin{cases} g_i & j=\pi(i)\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

הכפל ב $G\wr S_n$ ($\pi\in S_n,\ g_1,\dots,g_n\in G$) מעבר באמצעות הכפל הרגיל של מטריצות והכפל ב- G.

$$A(\pi,g_1,\dots g_n)\cdot A(\sigma,h_1,\dots,h_n)=A\big((\pi\sigma),g_{\sigma(1)}\cdot h_1,\dots,g_{\sigma(n)}h_n\big)$$

פעולה ב- S_n

דוגמא חשובה:

G חבורה ציקלית סופית

$$G = C_k = \langle g \mid g^k \rangle$$

יוצר   מספר טבעי

- C_k ניתנת למימוש ע"י חבורת שורשי היחידה המרוכבים מסדר k:

$$\{z \in \mathbb{C} \mid z^k = 1\} = \{w^j \mid 0 \le j \le n-1\}$$

$$\left(w = e^{\frac{2\pi i}{n}} \in \mathbb{C}\right)$$

אז $C_k \wr S_n$ היא חבורת מטריצות התמורה הצבועות (Colored), כלומר מטריצות תמורה שבהן במקום 1 רושמים שורש יחידה.

$$C_1 \wr S_n = S_n$$

$$C_2 \wr S_n = B_n \leftarrow$$ (כי השורשים המרוכבים של היחידה הם ± 1)

$$|C_k \wr S_n| = k^n \cdot n!$$

בתוך $C_k \wr S_n$ יש שתי חבורות חשובות

"S_n" – מטריצות תמורה "אמיתיות" (עם 1-ים).

"C_k^n" – מטריצות אלכסוניות $\begin{pmatrix} c_1 & & \\ & \ddots & \\ & & c_k \end{pmatrix}$

המטריצות האלכסוניות מהוות תת חבורה נורמלית שעליה S_n פועלת ע"י הצמדה.

לא קשה להראות ש: $C_k \wr S_n \cong C_k^n \rtimes S_n$

מכפלה חצי ישרה

חבורות קוקסטר

מתברר שיש לחבורה הסימטרית S_n הצגה יפה ע"י יוצרים ויחסים.

(נתבונן בחילופים הסמוכים (adjacent transpositions) ב S_n.

$$s_i = (i, i+1) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & i, & i+1 & \dots & n \\ 1 & & i+1, & i & \dots & n \end{pmatrix}$$

$(1 \le i \le n-1)$

לא קשה לבדוק ש s_i מקיימים:

I $s_i^2 = 1$ (1 = תמורת הזהות)

II $s_i s_j = s_j s_i$ אם $|i-j|>1$.

יחס הצמה (braid relations):

III $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$

$(1 \le i \le n-2)$

ניתן להוכיח שיחסים אלו מגדירים את S_n.
כלומר

$$S_n = \left\langle s_1, \dots, s_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{ll} s_i^2 = 1 & \\ s_i s_j = s_j s_i & (|i-j|>1) \\ s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1} & (1 \le i \le n-2) \end{array} \right\rangle$$

(*) המלצה על ספר קומבינטורי על חבורות קוקסטר: Bjorner and Brent

(ויש עוד הרבה ספרים טובים בנושא).

נשים לב: מתוך ש $s_i^2 = s_{i+1}^2 = 1$,

אפשר לכתוב ש $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$

בצורה השקולה $(s_i s_{i+1})^3 = 1$

ואם יחסי החילוף $s_i s_j = s_j s_i$ אפשר לכתוב

בצורה השקולה $(s_i s_j)^2 = 1$.

חבורת Coxeter כללית מוגדרת כך:

מטריצה (m_{ij}) מסדר $l \times l$ שאיבריה מתוך

הקבוצה $\{2,3,\dots,\infty\}$ כך ש $m_{ii}=1$

! $(i \neq j)$ $m_{ij} = m_{ji} \geq 2$ וההגדרה היא:

$$G = \langle s_1, \dots, s_l \mid (s_i s_j)^{m_{ij}} = 1 \quad (\forall i,j) \rangle ,$$

מובן מבנה שאם $m_{ij} = \infty$ אז היחס מושמט.

<u>דוגמה</u>:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} s_1 & s_2 & s_3 \end{array} \\
\begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{array} & (m_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \infty \\ 2 & 1 & \boxed{3} \\ \infty & 3 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

מה זה אומר כאן
המספר 3:
יש היחס $(s_2 s_3)^3 = 1$

$$G = \left\langle s_1, s_2, s_3 \;\middle|\; \begin{array}{l} s_1^2 = s_2^2 = s_3^2 = 1 \\ (s_1 s_2)^2 = (s_2 s_3)^3 = 1 \end{array} \right\rangle$$

$s_1 s_3$ לא מתחלפים.

$$G = \left\langle s_1, s_2, s_3 \;\middle|\; \begin{array}{l} (s_1 s_1)^1 = (s_2 s_2)^1 = (s_3 s_3)^1 = (s_1 s_2)^2 = \\ = (s_2 s_1)^2 = (s_2 s_3)^3 = (s_3 s_2)^3 = 1 \end{array} \right\rangle =$$

$$= \left\langle s_1, s_2, s_3 \;\middle|\; \begin{array}{l} s_1^2 = s_2^2 = s_3^2 = (s_1 s_2)^2 = (s_2 s_3)^3 = 1 \\ \text{(כלומר } s_1 s_3 \text{ לא מתחלפים)} \end{array} \right\rangle$$

הערה:
זו משפחת חבורות שהיא די רחבה אבל בעלת תכונות גיאומטריות ואחרות חשובות מאוד. היא פועלת על מרחב וקטורי בצורה טובה.

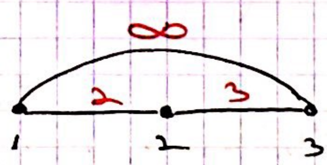
הערה:
חבורות קוקסטר הן מוצגות סופית (finitely presented) אבל בדרך כלל לא סופיות.
ישנו מיון מפורסם של חבורות קוקסטר הסופיות:

תאור גרפי של היחסים

לשם כך נתאר בצורה גרפית את היחסים (כלומר את המטריצה (m_{ij})):
נרשום גרף לא מכוון שבו:
קודקוד i ליוצר s_i
על הקשת ij רושמים m_{ij}:

דוגמא:

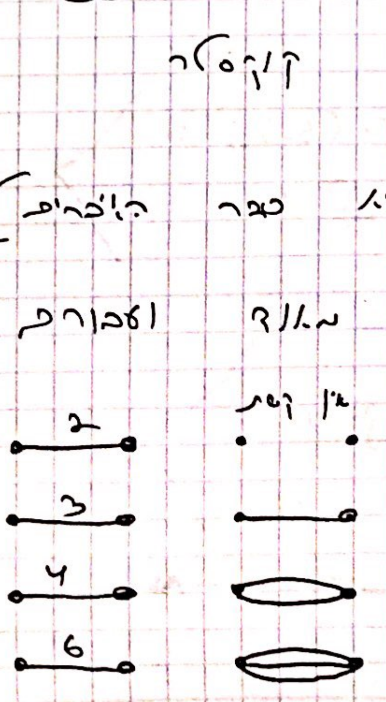
$$m_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \infty \\ 2 & 1 & 3 \\ \infty & 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$



בחבורות קוקסטר הסופיות לא מופיע ∞ (כי הסדר סופי). כלומר בחבורות קוקסטר הסופיות $m_{ij} \neq \infty$.

[הערה: בחבורות קוקסטר, החלקה היא כפר היוצרים].

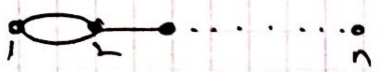
הערכים $m_{ij} = 2, 3, 4, 6$ שכיחים מאוד ועבורם מקובלים הקיצורים:



הגרף נקרא דינקין - קוקסטר.

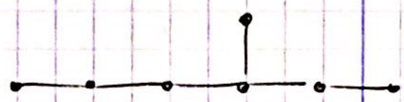
להלן רשימת דיאגרמות דינקין של כל חבורות קוקסטר הסופיות האי-פריקות (יכולות להופיע כסכום ישר).

A_n  $\cong S_{n+1}$

(C_n) B_n 

D_n 

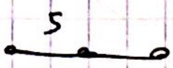
E_6 

E_7 

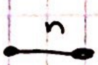
E_8 

F_4 

$(G_2$  $)$

H_3 

H_4 

$I_2(n)$  $(n \geq 4)$

$I_2(3) = A_2$ $\qquad I_2(4) = B_2$ $\qquad I_2(6) = G_2$

חבורות קוקסטר שכבר מוכרות לנו

type $A_n : \cong S_{n+1}$ $\qquad s_i = (i, i+1)$ $\qquad (1 \leq i \leq n)$

type B_n : $\cong B_n$ $\quad s_0 = (1,-1) \quad s_i = (i, i+1)$

$(C_n) \qquad 1 \le i \le n-1$

$$s_0 s_1 = (1, 2, \bar{1}, \bar{2})$$

$$(s_0 s_1)^4 = 1$$

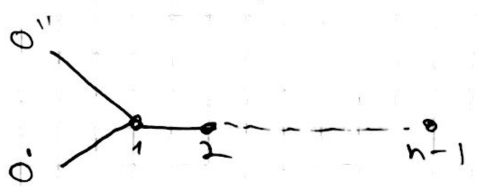
type D_n: תת חבורה מאינדקס 2 של B_n

(כל התמורות המסומנות עם מספר זוגי של מינוסים).

$$s_0' = \bar{1}\bar{2}\,3 \ldots n = (1,-1)\,(2,-2)$$

$$s_0'' = \bar{2}\bar{1}\,3 \ldots n = (1,-2)\,(-1,2)$$

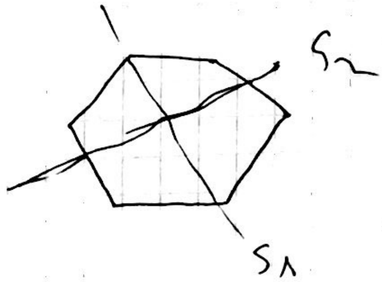
$$s_i' = (i, i+1) \qquad (1 \le i \le n-1)$$

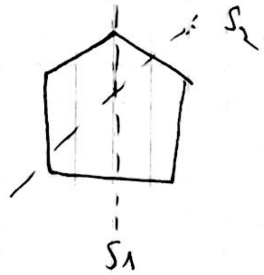


$I_2(n)$: החבורה הדיהדרלית

$$I_2(n) = \langle s_1, s_2 \mid s_1^2 = s_2^2 = (s_1 s_2)^2 = 1 \rangle$$

(כל חבורת הסימטריה של מצולע משוכלל בעל n צלעות





$$I_2(6) = G_2$$

- s_1, s_2 שיקופים   סיבוב בזוי' $\frac{2\pi}{n}$ = $s_1 s_2$

- היחס z מופיע רק בקווקסטר H_3, H_4 חלק.

הערה:

הדיאגרמות שבבסיס (A B F G H I)
הן חבורות הסימטריה של הפאונים
המשוכללים (בכל המימדים).

A_n - סימפלקס n-מימדי

B_n - קוביה n מימדי ___ והדואלי לקוביה.

I במישור

H_3 - איקוסאהדר ודודקאהדר

H_4 - גופים הקשורים לקובים במימד n
ואלה כל הפאונים המשוכללים.

עוד קרובים של S_n

① חבורות הצמות: ההצגה של S_n בלי
הדרישה $s_i^2=1$.

② 0-Hecke monoid

כמו S_n אבל במקום $s_i^2=1$ דורשים $s_i^2=s_i$.

יותר כללי: $(s_i-1)(s_i+q)=0$

ונקבל אלגברה ___ Hecke (Iwahori)

- $q=1$: S_n

- $q=0$: המונואיד 0-Hecke.