20.3.16

החבורה הסימטרית – הרצאה מס' 4

נמשיך בהגדרת עוד פרמטרים:

אך לפני זה, עוד משהו די מעניין ויפה:

באופן כללי אם: $\forall p : S_n \to \mathbb{Z}_+$ פרמטר יש נגדיר

הגדרה

$$P(q) = gf_n(p) := \sum_{\pi \in S_n} q^{p(\pi)}$$

מאפשרת לחשב את התוחלת $E[p]$

וגם את השונות $Var[p]$

(כאשר רואים את p כמשתנה מקרי על מרחב ההסתברות S_n, עם התפלגות אחידה)

$$E[p] := \frac{1}{|S_n|} \sum_{\pi \in S_n} p(\pi) = \left.\frac{P'(q)}{P(q)}\right|_{q=1}$$

למשל: עבור $gf_3(cyc) = P(q) = 2q + 3q^2 + q^3$

ולכן $E[p] = \frac{2+3\cdot 2+1}{2+3+1} = \frac{11}{6} = 1\frac{5}{6}$

נסמן את הנגזרת הלוגריתמית של $P(q)$:

$$L(q) := (\ln P(q))' = \frac{P'(q)}{P(q)}$$

אז כמובן

$$E[p] = L(q)\big|_{q=1}$$

ניתן לחשב גם ש:

$$Var[p] := E[(p - E[p])^2] = E[p^2] - E[p]^2$$

$$\overset{(*)}{=} [L'(q) + L(q)]\big|_{q=1}$$

Scanned by CamScanner

הסבר ל (*):

$$E[\rho^2] - (E[\rho])^2 =$$

$$= \frac{1}{|S_n|}\sum_{\pi\in S_n} \rho(\pi)^2 - L(1)^2 = \frac{P''(1)+P'(1)}{P(1)} - \left(\frac{P'(1)}{P(1)}\right)^2 =$$

$$= \frac{P''(1)P(1) - P'(1)^2}{P(1)^2} + \frac{P'(1)}{P(1)} =$$

$$= \left(\frac{P'(q)}{P(q)}\right)'\Bigg|_{q=1} + L(1) = L'(1) + L(1)$$

דוגמא: $\rho = \mathrm{inv}$, מס' היפוכים. כזכור

$$P(q) = \sum_{\pi\in S_n} q^{\mathrm{inv}(\pi)} = [n]!_q = \prod_{k=1}^{n}\left(1+q+\dots+q^{k-1}\right)$$

מה התוחלת של מספר ההיפוכים של $\pi\in S_n$?

$$L(q) = (\ln P(q))' = \sum_{k=1}^{n} \frac{1+2q+\dots+(k-1)q^{k-2}}{1+q+\dots+q^{k-1}}$$

$$L(1) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1+2+\dots+(k-1)}{k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{k(k-1)}{2k} = \frac{n(n-1)}{4}$$

ניתן הסבר פשוט לתוצאה זו!

ומבוסס בתמורה

$$w_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & & 2 & 1\end{pmatrix} = (1,n)(2,n-1)\dots$$

כך לכל — עבור $\pi\in S_n$:

$$\mathrm{inv}(\pi w_0) = \binom{n}{2} - \mathrm{inv}(\pi)$$

$$\Downarrow$$

$$i \longmapsto \pi(n+1-i)$$

כמובן בנוסף $\mathrm{inv}(w_0\pi) = \binom{n}{2} - \mathrm{inv}(\pi)$

$\mathrm{inv}(w_0\pi w_0) = \mathrm{inv}(\pi)$

Scanned by CamScanner

כפל מימין ב w_0 הוא תמורה על S_n:

$$\varphi: S_n \longrightarrow S_n$$
$$\pi \longmapsto \pi w_0$$

המשמעות:

$$inv(\varphi(\pi)) = \binom{n}{2} - inv(\pi)$$

ולכן

$$P(q) = \sum_{\pi\in S_n} q^{inv(\pi)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{תמורה } \varphi}}{=} \sum_{\pi\in S_n} q^{inv(\varphi(\pi))} =$$

$$= \sum_{\pi\in S_n} q^{\binom{n}{2} - inv(\pi)} = q^{\binom{n}{2}} P(q^{-1})$$

במילים אחרות:

הפולינום $P(q)$, שמעלתו $\binom{n}{2}$, הוא פלינדרומי (או סימטרי):

$$P(q) = \sum_{k=0}^{d} c_k q^k$$

פלינדרומי: $(\forall k)$

$$c_k = c_{d-k}$$

אם לפרמטר p יש פונקציה יוצרת $P(q)$ שהיא פולינום פלינדרומי מעלה d, אז

$$E[p] = \frac{d}{2}$$

הסבר

$$P(q) = q^d P(q^{-1})$$

נגזור לפי q:

$$P'(q) = d q^{d-1} P(q^{-1}) + q^d P'(q^{-1})(-q^{-2})$$

$q=1$: $2P'(1) = dP(1)$

$$L(1) = \frac{d}{2}$$

Scanned by CamScanner

הערה:

דרך נוספת להראות: $E[inv] = \frac{n(n-1)}{4}$

היא: לכל זוג אינדקסים $i<j$, ההסתברות ש- (i,j) הוא היפוך היא $\frac{1}{2}$.

כזכור, פרק 1 שבו הראינו גם את ה- cyc
(מס' המחזורים בפירוק למחזורים זרים)

$$\sum_{\pi \in S_n} q^{cyc(\pi)} = \prod_{k=1}^{n} (q+k-1)$$

נציג פרמטר נוסף:

left-to-right-maxima : (ערכים מרביים משמאל לימין)

$$ltrmax(\pi) := \#\{ j \mid \pi(j) = \max_{1 \le i \le j} \pi(i) \}$$

לדוגמה:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \in S_5$$

$$ltrmax(\pi) = 3$$

מה הפונקציה היוצרת שלו?

דוגמה $n=3$

123	132	213	231	312	321
3	2	2	2	1	1

$$\sum_{\pi \in S_3} q^{ltrmax(\pi)} = 2q + 3q^2 + q^3 = q(q+1)(q+2)$$

משפט:

$$\sum_{\pi \in S_n} q^{ltrmax(\pi)} = \sum_{\pi \in S_n} q^{cyc(\pi)} = \prod_{k=1}^{n} (q+k-1)$$

Scanned by CamScanner

הוכחה א': בוויקיפדיה של ח.

לתמורה ב-S_{n-1} נוסיף את הערך "1"

(אחרי שהגדלנו ב-1 את כל הערכים) (המשך...)

הוכחה ב': (קומבינטורית)

נבנה פונקציה $\varphi: S_n \to S_n$ חח"ע ועל כך שלכל $\pi_1 \in S_n$:

$$\varphi(\pi_1) = \pi_2 \Rightarrow cyc(\pi_1) = ltrmax(\pi_2)$$

תהי $\pi_1 \in S_n$. נציג את π_1 כמכפלת מחזורים זרים באופן הקנוני הבא:

כל מחזור יתחיל בערך הגדול ביותר שבו. המחזורים יסודרו בסדר עולה של ערך הראשון בה, למשל:

$$\pi = (1\,3\,\underline{7})(5\,\underline{6}\,2)(\underline{4})$$

$$= (\underline{4})(\underline{6}\,2\,5)(\underline{7}\,1\,3)$$

עכשיו נמחק את הסוגריים: π_2 היא התמורה שזו הצגתה בשורה אחת:

$$\pi_2 = 4\,6\,2\,5\,7\,1\,3 \in S_7$$

ברור שקיבלנו העתקה חח"ע ועל

$$\varphi: S_n \to S_n$$
$$\pi_1 \mapsto \pi_2$$

ב-π_2, כל מי שהיה ראשון במחזור של π_1 גדול מכל הראשונים במחזורים שלפניו, ולכן גדול מכל האיברים שלפניו, כלומר הוא: ltrmax.

מצד שני, מי שלא היה ראשון במחזור של π_1 הוא קטן מהראשון במחזורו, המופיע לפניו,

... ltrmax ב-π_2

Scanned by CamScanner

הערה: כמובן אפשר לדבר גם על ltrmin
(וכן rtlmax, rtlmin).
לרוב, כמובן, אותה פונקציה יוצרת.
עבור ltrmin שתי ההוכחות שלנו תהיינה
קצת יותר מסובכות:
בהוכחה א' (באינדוקציה) נוסיף את "n"
(ולא את "1")

בהוכחה ב' — הפירוק הקנוני למחזורים יכתב
כאשר כל מחזור מתחיל בערך הקטן ביותר בו,
וסדר האיברים הראשונים במחזורים הינו
יורד.

פרמטר נוסף: מספר הירידות (descent number)

$$\mathrm{Des}(\pi) := \{1 \le i \le n-1 \mid \pi(i) > \pi(i+1)\}$$

קבוצת הירידות = descent set

$$\mathrm{des}(\pi) := \#\mathrm{Des}(\pi) =$$ מספר הירידות

לדוגמה:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 7 & 6 & 4 \end{pmatrix} \in S_7$$

$$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$$

$$\underbrace{\mathrm{Des}(\pi) = \{1,3,5,6\}}_{\text{המקומות}}, \quad \mathrm{des}(\pi) = 4$$

Scanned by CamScanner

דוגמא: $n=3$:

123	132	213	231	312	321
0	1	1	1	1	2

$$\sum_{\pi\in S_3} q^{des(\pi)} = 1+4q+q^2$$

עוד פרמטר:

$$Exc(\pi) := \{1\le i\le n \mid \pi(i) > i\}$$

קבוצת העודפים = excedance set

$$exc(\pi) := \# Exc(\pi)$$

מס' העודפים = excedance number

למשל:

$$\pi = 5\,1\,3\,2\,7\,6\,4 = \begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7\\ 5&1&3&2&7&6&4 \end{pmatrix}$$

$$exc(\pi) = 2$$

דוגמא! $n=3$

$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$
0	1	1	2	1	1

$$\sum_{\pi\in S_3} q^{exc(\pi)} = 1+4q+q^2$$

עוד פרמטר:

$$WExc(\pi) := \{1\le i\le n \mid \pi(i) \ge i\}$$

קבוצת העודפים החלשים = weak excedance set

$$wexc(\pi) := \# WExc(\pi)$$

Scanned by CamScanner

לדוגמה

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$wexc(\pi) = 4$$

$n=3$:

$$\begin{pmatrix} 123 \\ 123 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 123 \\ 132 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 123 \\ 213 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 123 \\ 231 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 123 \\ 312 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 123 \\ 321 \end{pmatrix}$$

$$3 \qquad 2 \qquad 2 \qquad 2 \qquad 1 \qquad 2$$

$$\sum_{\pi \in S_3} q^{wexc(\pi)} = q + 4q^2 + q^3$$

משפט:

$$\sum_{\pi \in S_n} q^{1+des(\pi)} = \sum_{\pi \in S_n} q^{1+exc(\pi)} = \sum_{\pi \in S_n} q^{wexc(\pi)}$$

הפונקציה היוצרת המשותפת נקראת

Eulerian distribution

הערה: (עוד כדאי מהספר החשוב והטוב של
קלאסי ידוע Stanley
בשם: Enumerative Combinatorics 1
מהדורה השנייה)

יהי $\pi_1 \in S_n$. נכתוב אותו כמכפלת מחזורים זרים באופן קנוני כמו קודם (כל מחזור מתחיל באיבר הגדול ביותר שבו והמחזורים מופיעים בסדר עולה של האיברים הראשונים).

$$\pi_1 = (a_1 \cdots a_{i_1})(a_{i_1+1} \cdots a_{i_2}) \cdots (\cdots a_{i_k})$$

הערה:

$$\underbrace{\pi_1(a_i)}_{a_j} < \underbrace{a_i}_{\pi_1^{-1}(a_j)} \iff a_i > a_{i+1}$$

$\pi_1($

Scanned by CamScanner

הסבר :

אם a_i הוא האיבר האחרון במחזור, אז a_{i+1}
הוא הראשון במחזור הבא, וגדול מכל קודמיו, ובפרט $a_i < a_{i+1}$; וגם $\pi_1(a_i)$ הוא
הראשון במחזור של a_i, ולכן $\pi_1(a_i) \ge a_i$
(יתכן שוויון אם המחזור באורך 1).
בכל אופן, גם "$a_i > a_{i+1}$" וגם "$\pi_1(a_i) < a_i$"
לא מתקיימים.

(במקרה המיוחד $i=n$, רק "$a_i > a_{i+1}$"
אין משמעות, ואילו "$\pi_1(a_i)<a_i$" לא נכון)

בכל מקרה אחר (כלומר: a_i אינו האחרון
במחזור) מתקיים $\pi_1(a_i)=a_{i+1}$, ולכן בוודאי

נסדר בגודל:
$\pi_1 = (4)(625)(713)$

$$\pi_1(a_i)<a_i \iff a_i > a_{i+1}$$
■

נסיק את ההעתקה
$$\varphi: S_n \to S_n,\quad \pi_1 \mapsto \pi_2$$
שראינו קודם ("מחיקת הסוגריים") ואז הפיכה

$$\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 6 & 2 & 5 & 7 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

אומרת (לכל $i \neq n$):

$$j \in \cancel{2 \in} Exc(\pi_1^{-1}) \iff i \in Des(\pi_2)$$

$\boxed{a_j = \pi_1(a_i)}$

ולכן ל-des, exc יש אותה פונק' יוצרת.

כמו כן,

$$des(\pi w_0) = n-1-des(\pi)$$
$(\forall \pi \in S_n)$

ולכן הפונק' היוצרת $\sum_{\pi\in S_n} q^{des(\pi)}$ היא פלינדרום,
וכך גם $\sum_{\pi \in S_n} q^{exc(\pi)}$

Scanned by CamScanner

נבדק שוב, בבירור:

$i \in WExc(\pi) \iff n+1-i \notin Exc(w_0 \pi w_0)$

$\pi(i) \geq i \qquad\qquad w_0 \pi \underbrace{w_0(n+1-i)}_{i} \leq n+1-i$

$\boxed{n+1-\pi(i)} \leq \boxed{n+1-i}$

$(w_0 : i \leftrightarrow n+1-i)$

$\Downarrow$

$$\sum_{\pi \in S_n} q^{wexc(\pi)} = \sum_{\pi \in S_n} q^{n-exc(w_0 \pi w_0)} = \sum_{\pi \in S_n} q^{n-exc(\pi)}$$

$$\left(= q \cdot q^{n-1} \sum_{\pi \in S_n} q^{-exc(\pi)}\right) = q^n \sum_{\pi \in S_n} q^{-exc(\pi)} =$$

פולינדרום ממעלה $(n-1)$ $\displaystyle = q \sum_{\pi \in S_n} q^{exc(\pi)} = \sum_{\pi \in S_n} q^{1+exc(\pi)}$

$\blacksquare$

עוד פרמטר: האינדקס (major index

$\pi \in S_n$ (על שם Percy Alexander MacMahon
~~[illegible]~~ מייג'ור שהיה בצ' בריט' major...)

$$maj(\pi) := \sum_{i \in Des(\pi)} i$$

דוגמה

$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 3 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} \in S_6 \Rightarrow Des(\pi) = \{2,3,5\} \Rightarrow maj(\pi) = 10$
$des(\pi) = 3 \qquad (2+3+5)$

$n=3$:

$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$
0	2	1	2	1	3

$$\sum_{\pi \in S_3} q^{maj(\pi)} = 1 + 2q + 2q^2 + q^3 = (1+q)(1+q+q^2)$$

Scanned by CamScanner