טבלאות יאנג סטנדרטיות

(SYT = Standard Young Tableaux)

מקורות:

* הקשר של SYT להצגות של S_n:
  למשל בספר של Sagan, פרק 2
  (וגם Stanley, EC2, Ch.7)
* ספירת SYT: מאמר Adin-Roichman (Enumeration of SYT) בארכיב [פורסם כפרק בתוך Handbook of Enumeration].

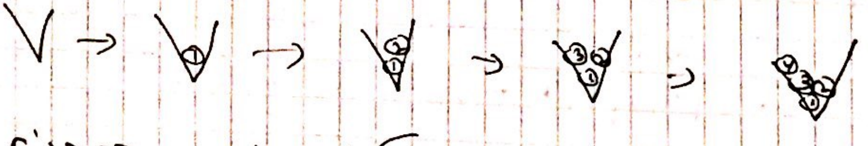
התכנית להיום:

* מה זה SYT? (מספר הגדרות)
* הקשר להצגות של S_n (בקצרה)
* ספירת SYT.

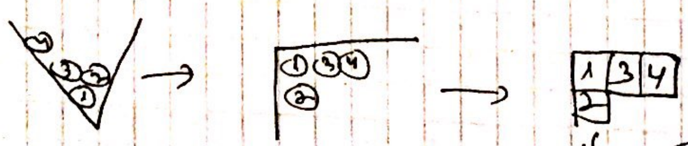
מה זה SYT?

הגדרה 1:

לתוך כלי בצורת V (עם דפנות ניצבות על הצד) זורקים, בזה אחר זה, כדורים שווי-גודל הממוספרים $1, 2, \dots, n$.



אחרי שזרקנו n כדורים, נסתכל על התצורה שקיבלנו, נסובב ב-$135°$ ונהפוך כל כדור לריבוע



טבלת יאנג סטנדרטית (SYT)

דוגמה:

הטבלאות הסטנדרטיות בגודל $n=3$ הן:

SYT:

1	2	3

1	2
3	

1	3
2	

1
2
3

צורה (shape): (3) $(2,1)$ $(2,1)$ $(1,1,1)$

לכל טבלת יאנג סטנדרטית יש **צורה** שהיא חלוקה (partition) $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_t)$ של n שלמים, $\lambda_1\ge\dots\ge\lambda_t>0$ ($\lambda_1+\dots+\lambda_t=n$) כאשר λ_i הוא מספר הכדורים/תאים בשורה i.

הגדרה ג:

בהינתן n טבעי, בוחרים חלוקה λ של n (רושמים: $\lambda\vdash n$).

מתאימים ל-λ את **הדיאגרמה** $[\lambda]$, שהיא אוסף של נקודות בשריג $\mathbb{Z}^2$:

$$[\lambda]:=\{(i,j)\in\mathbb{Z}^2 \mid 1\le i\le t,\ 1\le j\le\lambda_i\}$$

טבלת יאנג סטנדרטית מצורה λ היא מילוי של הדיאגרמה $[\lambda]$ במספרים $1,\dots,n$ ($\{1,\dots,n\}$) ~~באופן~~ (כלומר: פונקציה $T:[\lambda]\to[n]$) כך ש:

א. כל מספר מופיע פעם אחת

ב. המספרים בכל שורה עולים (משמאל לימין)

ג. המספרים בכל עמודה עולים (מלמטה למעלה).

דוגמה: $n=7$ ← $\lambda=(\overset{\lambda_1}{4},\overset{\lambda_2}{2},\overset{\lambda_3}{1})$

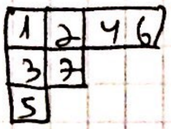
$$[\lambda]:\ \begin{array}{llll} \bullet & & & \\ \bullet & \bullet & & \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array}$$

דוגמה לט"ס $T:[\lambda]\to[7]$:

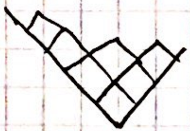
$$\begin{array}{llll} 5 & & & \\ 3 & 7 & & \\ 1 & 2 & 4 & 6 \end{array}$$

הערה: עבור $n=0$ יש חלוקה יחידה (ריקה) וטבלה יחידה (ריקה).

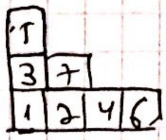
הערה: למעשה, תאמינו עד כה **שלושה** דרכי סימון (conventions) שונות לתיאור SYT:



אנגלית



רוסית



צרפתית

בקורס נשתמש בעיקר במוסכמה האנגלית.

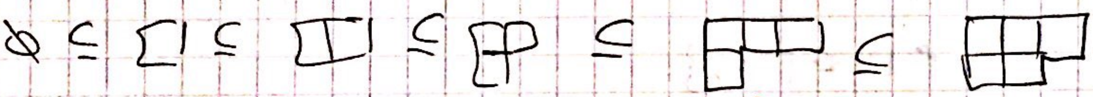
פרשנויות נוספות של SYT:

* תהליך גדילה של חלוקות

דוגמה: הטבלה

1	2	4
3	5	

מתארת תהליך גדילה של דיאגרמות (או חלוקות):



() (1) (2) (2,1) (3,1) (3,2)

ניסוח אחר:

יהי Y אוסף כל החלוקות (דיאגרמות) מכל הגדלים. Y סדור חלקית ע"י הכלה

($\lambda \le \mu \iff \lambda_i \le \mu_i \ (\forall i)$, כאשר משלימים את λ, μ באפסים לפי הצורך)

ל-Y יש איבר קטן ביותר $\emptyset$.

כל טבלת יאנג סטנדרטית מצורה λ היא בעצם שרשרת מקסימלית ב-Y מ-$\emptyset$ ל-λ.

הערה:

Y הינו בפרט סריג (lattice)

ונקרא **סריג יאנג** (Young lattice)

כאשר

$$[\lambda \wedge \mu] = [\lambda] \cap [\mu] \quad (\text{חיתוך})$$

$$[\lambda \vee \mu] = [\lambda] \cup [\mu] \quad (\text{איחוד})$$

סימון: f^λ = מס' ט"ס מצורה λ.

למשל: $f^{(3,1)} = 3$

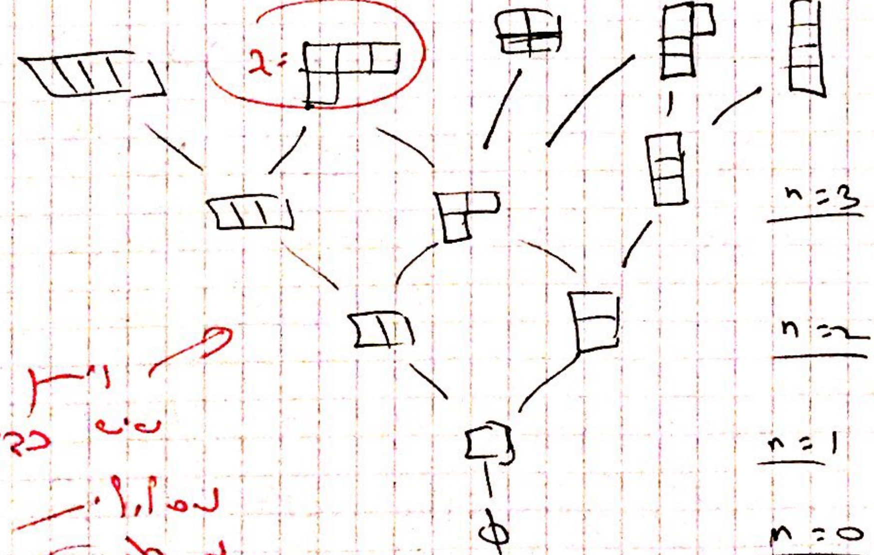
$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 \\ \cline{1-1}\end{array}$

קבלנו עוד פי':

f^λ – מספר השרשראות המקסימליות בקטע (interval) $[\phi, \lambda]$ בסריג יאנג Y.

$\{\mu \mid \phi \le \mu \le \lambda\}$

ציור של הסריג:



יש בדיוק 3 מסלולים מ ϕ ל λ

הילוכי שריג:

תהי T טבלה סטנדרטית מצורה $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_t)\vdash n$

אפשר להתאים ל-T הילוך בשריג $\mathbb{Z}^t$

בצורה הבאה:

הילוך מתחיל בראשית $\vec{0}=(0,\dots,0)\in\mathbb{Z}^t$.

הילוך כולל n צעדים, כאשר בצעד $1\le k\le n$

הולכים מהנקודה v_{k-1} לנקודה $v_k=v_{k-1}+e_i$

כאשר i היא השורה ב-T שבה (נמצא) המספר k, ו-e_i הוא וקטור היחידה

הסטנדרטי ה-i:

$$e_i=(\dots,0,\underset{\substack{\uparrow\\ \text{מקום } i}}{1},0,\dots) \qquad (1\le i\le t)$$

דוגמא:

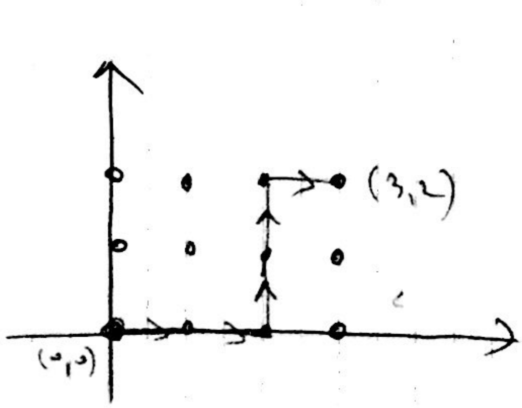
$$T=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&5\\\hline 3&4\\\cline{1-2}\end{array}$$

כאן $n=5$, $t=2$, $\lambda=(3,2)\vdash 5$

הילוך ב-$\mathbb{Z}^2$:

$$(0,0)\xrightarrow[+e_1]{}(1,0)\xrightarrow[+e_1]{}(2,0)\xrightarrow[+e_2]{}(2,1)\xrightarrow[+e_2]{}(2,2)\xrightarrow[+e_1]{}(3,2)$$

$$\Downarrow$$



הילוכי השריג המתאימים הם בדיוק ההילוכים מ $\vec{0}$ ל- $\vec{\lambda}$ ב $(\mathbb{Z}^t)$ שבהם בכל צעד מוסיפים וקטור יחידה e_i $(1\le i\le t)$, וכך שההילוך נמצא בקבוצה (חדר)

$$\{(x_1,\dots,x_t)\in\mathbb{R}^t \mid x_1\ge x_2\ge\dots x_t\ge 0\}$$

מקרה פרטי חשוב ($t=2$):

$$\{(x_1,x_2) \mid x_1\ge x_2\ge 0\}$$

הילוכי השריג $(0,0)\to(\lambda_1,\lambda_2)$ הנמצאים מתחת לישר $x_2=x_1$ (או נוגעים בו).

אפשר לרשום הילוך שריג ע"י סדרת הקואורדינטות i אותן אנו מגדילים.

בדוגמא הנ"ל:

$$b=(1,1,2,2,1)$$

(בכל שלב k רושמים באיזו שורה בטבלה נמצא הערך k)

הסדרות האפשריות $b=(b_1,\dots,b_n)$ הן סדרות באורך n המקיימות:

א. $b_k\in\{1,\dots,t\}$ $(\forall\, 1\le k\le n)$

ב. $\#\{k \mid b_k=i\}=\lambda_i$ $(\forall\, 1\le i\le t)$

ג. בכל רישא $\{b_1,\dots b_s\}$ $(0\le s\le n)$ לכל $1\le i\le t-1$:

$$\#\{1\le k\le s \mid b_k=i\}\ge \#\{1\le k\le s \mid b_k=i+1\}$$

<u>בעיה:</u>

בכל רגע $(b_1,\dots,b_t)$ יש

מס' 1-ים $\geq$ מס' 2-ים $\geq$ מס' 3-ים $\geq \dots$

סדרות אלו נחקרו ע"י MacMahon

ונקראו להן <u>סדרות קלפי</u> (ballot sequences)

או <u>תמורות שריג</u>. (lattice permutations)

עם הפירוש:

בבחירות בין t מועמדים, עם קלפי

אחת, משתתפים n מצביעים. נניח

ש- n הפתקים, לפי סדר ההצבעה הם

$(b_1,\dots,b_n)$. (כאשר $b_i \in [t]$ $(\forall i)$).

בהינתן התוצאה הסופית, שבה מועמד

i קיבל λ_i קולות ($\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_t$)

מה מספר האפשרויות (= סדרות פתקים)

שבהן, בכל שלב בהצבעה, ~~מס' הפתקים~~

~~של מועמד~~

מס' הפתקים של מועמד 1 $\geq$ מס' הפתקים של מועמד 2 $\geq \dots$?

תשובה: f^{λ}.

<u>פאון הסדר</u> (order polytope):

תהי $(D, \leq)$ קבוצה סדורה חלקית סופית.

ונסמן ב:

$$I := [0,1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$$

<u>פאון הסדר</u> $P(D)$ המתאים ל-D הוא

$$P(D) := \{ f : D \to I \mid f \text{ שומרת סדר} \}$$

כאשר הסדר ב-I הוא הסדר הרגיל בין המספרים הממשיים.

במילים אחרות:

$$P(D) = \{ f : D \to I \mid (\forall x_1, x_2 \in D)\ x_1 \underset{D}{\leq} x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \}$$

אם נמספר באופן שרירותי את איברי D ע"י $n, \dots, 1$,
נקבל סדר חלקי $\underset{D}{\leq}$ על $[n]$. פונקציה $f : D \to I$ ניתנת לתיאור ע"י סדרת ערכים

$(f(1), \dots, f(n)) \in I^n = [0,1]^n$ קוביה n מימדית

$P(D) \subseteq I^n$ היא קבוצת הנקודות $(f(1), \dots, f(n)) \in I^n$ המקיימים

$$i \underset{D}{\leq} j \implies f(i) \leq f(j)$$

אלו אי-שוויונות לינאריים הומוגניים.
אם נוסיף להם את אי-השוויונות
$0 \leq f(i) \leq 1$ $(i = 1, \dots, n)$ המגדירים את
הקוביה I^n, נקבל ש-$P(D)$ היא קבוצה
קמורה שהיא חיתוך של מספר סופי
של חצאי מרחב סגורים, כלומר: פאון (polytope).

<u>דוגמא</u>: אם $D=[n]$ עם הסדר הלינארי הרגיל
$n > \dots > 2 > 1$

אז, בסימון $x_i := f(i)$:

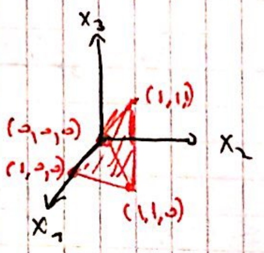
$$P(D) = \{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid 1\ge x_1\ge x_2\ge\dots\ge x_n\ge 0\}$$

<u>זהו סימפלקס n-ממדי!</u>

<u>$n=1$</u>

<u>$n=2$</u>

<u>$n=3$</u>



$$= \mathrm{conv}\{(0,0,0),(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$$

כל סדר חלקי D ניתן <u>להרחבה</u> לסדר לינארי (linear extension) בדרכים שונות.
סדר יותר "חזק" (יחס סדר יותר "גדול")
פירוש: כאן יותר <u>קטן</u>
בפרט: כל הרחבה לינארית של D נותנת <u>סימפלקס</u> המוכל בפוליטופ $P(D)$.

לכל הסימפלקסים הללו (המתקבלים) יש מבנה זהה עד תמורה של $[n]$) יש אותו <u>נפח</u> שאפשר להראות (באינדוקציה) שהוא $\frac{1}{n!}$.

סימפלקסים המתאימים לסדרים לינאריים שונים הם זרים בפנימיהם (כי אם $1\ge x_1\ge\dots>x_n\ge 0$ אז יש סדר לינארי יחיד המתאים לו, ולכן החיתוך של שני סימפלקסים מוכל בעל מימד (...)

בסך הכל:

הנפח של $P(D)$ הוא איחוד, "עד בפנימים", של הסימפלקסים המתאימים להרחבות הלינאריות של $\leq_D$, ולכן

$$\boxed{Vol\ P(D) = \frac{f^D}{n!}} \leftarrow \text{נפח}$$

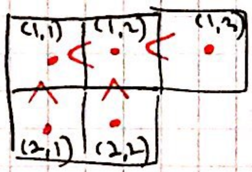
כאשר f^D הוא מספר ההרחבות הלינאריות של $\leq_D$.

איך זה קשור ל SYT?

תהי $\lambda \vdash n$. הדיאגרמה $[\lambda]$ מורכבת מקודקודי שריג, או תאים, $(i,j) \in \mathbb{Z}^2$.

<u>נגדיר:</u> $(i_1,j_1) \leq_D (i_2,j_2) \iff i_1 \leq i_2 \wedge j_1 \leq j_2$

<u>דוגמא:</u>



$(1,1) \leq (1,2) \leq (1,3)$

$(1,1) \leq (2,1)$

$(1,2) \leq (2,2)$

ההרחבות הלינאריות של הסדר החלקי $\leq_D$ זה הן בדיוק SYT מצורה λ

ולכן מסקנה:

$$\boxed{f^\lambda = n! \cdot Vol\ P(D)}$$

<u>שאלות:</u>

(*) איך SYT קשורות להוכחה הסימטרית?

(*) איך לחשב את f^λ?