אלגוריתם RSK

[פרק 7, סעיפים 7.11+7.13, Stanley, EC2]
[Sagan, 3.1-3.6]

__הגדרה__: אלגוריתם RSK נותן התאמה (מפורשת) חח"ע ועל $\pi \to (P,Q)$ מתמורות $\pi \in S_n$ לזוגות (P,Q) של ט"י (SYT) מאותה צורה ומגודל n.

__היסטוריה__

RSK = Robinson-Schensted-Knuth

* [Robinson, 1938] הגדיר את כלל Q (סתום אך יפה, אולי לפי רעיון של Littlewood)
* [Schensted, '61] (באופן כללי יותר) במחקר עבודתו לספירת תמורות עם תת-סדרה עולה באורך מקסימלי נתון.
* [Knuth, '70] הכליל את האלגוריתם מתמורות למטריצות אי-שליליות (תמורות זה מקרה פרטי)

- נדון בהצגה האלגוריתם RSK המוכלל, ונציג SSYT (Semi Standard Y.T.)

__הגדרה__: תהי λ חלוקה של n. טבלת יאנג סטנדרטית למחצה (ט"ס = SSYT) מצורה λ היא מילוי של הדיאגרמה $[\lambda]$ במספרים טבעיים כך ש:

(א) בכל שורה, הערכים __עולים חלש__.

(ב) בכל עמודה, הערכים __עולים (חזק)__.

דוגמא 1:

1 1 1 2 3 4 4
2 2 3 4
4 5 8
6
8

$$\lambda = (7,4,3,1,1) \vdash 16$$

כמובן כל SYT הוא SSYT.

נזכיר גם את מושג התמורה.

הגדרה: מטריצה = אי-שלילית היא מטריצה (מלבנית) $A=(a_{ij})$ שכל אחד מהאיברים היא מספר שלם אי-שלילי $a_{ij}\geq 0$

דוגמא:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

עבור מטריצה אי-שלילית A נגדיר:

$\mathrm{row}A$ = וקטור סכומי השורות של A

$\mathrm{col}A$ = " " העמודות של A

בדוגמא הנ"ל:

$$\mathrm{row}(A)=(4,5,7)$$
$$\mathrm{col}(A)=(3,5,2,6)$$

הערה: הדרישה

$$\mathrm{row}(A)=\mathrm{col}(A)=(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{n})$$

פירושה: המטריצה A ריבועית שבה כל שורה ועמודה שלה יש 1 יחיד (והשאר אפסים)

כלומר:

A מטריצת תמורה:

$$\pi \to A_\pi = (a_{ij})$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & j = \pi(i) \quad \text{אם} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

תיאור האלגוריתם:

האלגוריתם הוא איטרטיבי:

$$(P_0, Q_0) \to (P_1, Q_1) \to \dots \to (P_n, Q_n)$$

$$\overset{\shortparallel}{(\phi, \phi)}$$

כאשר בכל שלב $0 \le t \le n$,

P_t, Q_t הן טבלאות סטנדרטיות מתאימות

בגודל t מאותה צורה.

המעבר $P_{t-1} \to P_t$ הוא ע"י פעולת

בחירה/הכנסה לשורה (row insertion)

תיאור המעבר:

נתונים: P (SSYT)

k (מספר טבעי)

הכנסה $k \leftarrow P$ מתבצעת באופן הבא:

(א) אם k גדול ממש מכל איברי השורה הראשונה של P,

מגדילים את P ע"י הוספת k בסוף

שורה זו, בצורה משמרת הדחיסה.

(בפרט, אם השורה הראשונה ריקה, k הופך לאיבר הראשון בשורה זו).

(ב) אחרת – יש בשורה הראשונה יש איברים

גדולים ממש מ k. בשורה זו, k דוחף החוצה

את האיבר הראשון הגדול ממנו ונכנס במקומו $\Leftarrow$

האיבר הנדחף מנסה למצוא מקום בשורה השניה בדיוק באותו אופן (וכו', וכו').

דוגמא:

$$P = \begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 6 & & \\ 6 & & & & \end{matrix} \quad , \quad k=4$$

$$\Downarrow$$

$$P \leftarrow k \quad = \quad \begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & & \\ 6 & 6 & & & \end{matrix}$$

תיאור האלגוריתם כולו

תהי A מטריצה אי-שלילית.

נרשום את A בצורת "תמורה מוכללת":

$$W_A = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}$$

כאשר n = סכום איברי המטריצה A,
הזוגות $(i_1,j_1) \dots (i_n,j_n)$ הם הקואורדינטות (שורה ועמודה) של איברי A שונים מאפס,
כאשר כל זוג מופיע מספר פעמים כערך האיבר המתאים.

סדר הזוגות הוא "מילוני" (lexicographic)

כלומר: $i_1 \le \dots \le i_n$

ואם $i_k = i_{k+1}$ אז $i_k \le j_{k+1}$

דוגמא

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

אז n = סכום האיברים כלומר $n=9$.

$$W_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

הערה:

אם $A = A_\pi$ מטריצת תמורה

$(a_{ij}=1 \iff j=\pi(i))$ אזי

$$W_A = \pi = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \pi(1) & & \pi(n) \end{pmatrix}$$

דוגמא:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_\pi$$

$$W_A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \pi$$

בהינתן

$$W_A = \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_n \\ j_1 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$$

כלומר, בשלב t של האלגוריתם

$$(P_{t-1}, Q_{t-1}) \longrightarrow (P_t, Q_t) \quad (1 \le t \le n)$$

ראשית, מוסיפים $j_t \to P_{t-1}$ לקבלת P_t

(שגדלה ב-1 מ P_{t-1}), ומעדכנים את Q_t

באופן הבא:

בונים Q_t הוא בצורת P_t, Q_t

מכילה את Q_{t-1} כפי שהוא, ויש לה

תא נוסף שבו רושמים את i_t.

P_t נקראת insertion tableau

Q " recording tableau

דוגמא:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$W_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

t	P_t	Q_t
0	$\emptyset$	$\emptyset$
1	1	1
2	13	11
3	133	111
4	123 3	111 2
5	122 33	111 22
6	1122 23 3	1113 22 3
	P	Q

דוגמא נוספת: (תשובה)

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

t	P	Q
0	$\emptyset$	$\emptyset$
1	5	1
2	1 5	1 2
3	13 5	13 2
4	12 3 5	13 2 4
5	124 3 5 P	135 2 4 Q

משפט:

אלגוריתם RSK מגדיר התאמה חח"ע ועל בין קבוצת המטריצות הא'-שליליות לבין קבוצת הזוגות (P,Q) של טבלו מאותה צורה.

בהתאמה זו,

$(\forall j)$ $\sum_i a_{ij}$ הוא מס' ההופעות של j ב-P,

$(\forall i)$ $\sum_j a_{ij}$ " " " " i ב-Q.

בניסוח שקול:

נגדיר עבור טבלו P:

$$type(P) = (n_1, n_2, \dots)$$

כאשר

$$n_k = \#\{(i,j) \mid P_{i,j} = k\}$$

(וקטור ההופעות של ערכים ב-P)

אז, אם

$$A \xrightarrow{RSK} (P,Q)$$

אז

$$type(P) = col(A)$$

$$type(Q) = row(A)$$

$$\left[A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right]$$ בדוגמה החשובה שלנו

ניתן לראות כי:

$$col(A) = (2,3,2) = type(P)$$

$$row(A) = (3,2,2) = type(Q)$$

<u>הערה</u>:
מאחר שמטריצת תמורה (עבור תמורה ב-S_n)
מאוזנת ע״י

$$row(A) = col(A) = (1,1,\dots,1)$$

וטי״ס מאוזנת — טי״סל מ-

$$type = (\underbrace{1,\dots,1}_{n})$$

<u>עקרון מסקנה המשפט</u>:
(אלגוריתם $RS(K)$)
מגדיר התאמה חח״ע ועל בין תמורות $\pi \in S_n$
לזוגות (P,Q) של <u>טי״ס</u> (SYT)
מאותה צורה.

להוכחת המשפט נשתמש בכמה סדר שלבי

<u>הגדרה</u>:
תהי P טי״סל, ויהי k טבעי.
<u>מסלול ההכנסה</u> (insertion path) $I(P \leftarrow k)$
היא סדרת המקומות (שורה ועמודה ב-P)
המשתנים במהלך הכנסה $P \leftarrow k$.

<u>דוגמה</u>:

$$P = \begin{matrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{matrix} \qquad k=3$$

$$P \leftarrow k = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & & \end{matrix}$$

$$I(P \leftarrow k) = \big((1,3), (2,3), (3,1) \big)$$

בחור שמסלול דחיפה מפני מקומו ___
משמאל ___ ולמעלה ___ . מה לגבי העמודות ?

למה : תהי P טבלו (דיאג SSYT)

(א) אם k ספרה כלשהי, אז מסלול הדחיפה
$I(P \leftarrow k)$ נע שמאלה באופן חלש,
כלומר : אם $(r,s), (r+1,t) \in I(P \leftarrow k)$
אז $t \leq s$

(ב) אם $j \leq k$ אז המסלול $I((P \leftarrow j) \leftarrow k)$
נמצא ממש מימין של המסלול $I(P \leftarrow j)$
ואורכו אינו גדול יותר, כלומר :

$$\# I((P \leftarrow j) \leftarrow k) \leq \# I(P \leftarrow j)$$

דוגמא :

$P =$ 1 2 5 6
3 7

$j = 4, \; k = 5$

$P \leftarrow j$: 1 2 4 6
3 5
7

$(P \leftarrow j) \leftarrow k$: 1 2 4 5
3 5 6
7

הוכחת הטענה :

(א) יהי (r,l), $(r+1,t)$ שני שיבוצים עוקבים במסלול הדחיפה $I(p \leftarrow k)$. נוכיח: $t \leq s$.

ונסמן בשיבוץ $(r+1,s)$ ב p.

אם השיבוץ לא ריק, ואז בוודאי $t \leq s$

(כי אפשר להציב ״חור״ במקום האחר);

אם שיבוץ לא ריק, ואז $p_{r+1,s} > p_{r,s}$

(כי p ט״ס, עמודות עולות ממש)

ולפי כללי הדחיפה, שוב $t \leq s$

□

(ב) בדחיפה $((p \leftarrow j) \leftarrow k)$,

אם k נדחף מאחרי השורה הראשונה של $j \rightarrow p$, ואז המסלול שלו הוא באורך 1 ונמצא ממש מימין ל- j (כי $j \leq k$)

אם k דוחף משהו מהשורה הראשונה, כלומר: היה שם איבר גדול ממש מ k ובוודאי גדול ממש מ- j, ולכן גם j דוחף משהו.

הנדחף ע״י k $\leq$ הנדחף ע״י j,

(ומקומו היה מימין למקום j, כי $j \leq k$).

ממשיכים לשורה השניה

(אינדוקציה על מס׳ השורות)

□

מסקנה: אם p ט״ס, k טבעי, אז גם $k \leftarrow p$ ט״ס.

הוכחת המסקנה:

ברור מהבנייה שהשורה ב- א ← ק עולה חזק.
אם k דוחף את l, אז המיקום החדש של l
הוא שמאלה (חזק) ממיקום k, ולכן הוא נמצא
מעל למיקום l הוא (בגלל שהשורה ב- א)
קטן או שווה ל-k, ולכן קטן ממש מ- l.
∎

(הוכחת המשפט - בתרגיל).
אחרי השיעור ב- SAGE

תכונות חשובות של RSK (עבור תמורות):

1. אם $\pi \mapsto (P,Q)$ אז $\pi^{-1} \mapsto (Q,P)$

2. אם $\pi \mapsto (P,Q)$ אז "הרברס" ~~[illegible]~~

π^r $\left(\pi^r(i) := \pi(n+1-i)\right)$ $\left(\pi^r = \pi \cdot w_0\right)$

כפי שהגדרנו בהרצאות קודמות

מקיים:

$$\pi^r \longmapsto (P^t, \tilde{Q})$$

שחלוף

מסובך יותר.

3. $\begin{pmatrix} P \\ SYT \end{pmatrix}$ $Des(P) := \{ i \mid$ השורה שבה i היא מעל השורה שבה i+1 ב- P $\}$

אם $\pi \to (P,Q)$ אז

$$Des(\pi) = Des(Q)$$

$$Des(\pi^{-1}) = Des(P)$$