מניה של SYT

[מבוסס על מאמר / פרק A-R פרק 7]

<u>תזכורת</u>: טבלה צעירה, סטנדרטית (SYT)

מצורה $\lambda \vdash n$ היא מילוי של הדיאגרמה $[\lambda]$ ע"י

המספרים $1,\dots,n$ כל אחד פעם אחת, כך שהערכים

<u>עולים</u> בכל שורה (משמאל לימין) ובכל עמודה (מלמעלה למטה).

הדיאגרמה מצוירת בשיטה האנגלית.

<u>דוגמא</u>:

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&4\\ \hline 2&5\\ \cline{1-2} 6&7\\ \cline{1-2}\end{array} \qquad \lambda=(3,2,2)\vdash 7$$

<u>מטרתנו היום</u>: למצוא נוסחה סגורה ל- f^λ.

תזכורת: f^λ – מס' הטבלאות מצורה λ.

<u>הערה מקדימה</u>:

כשנדבר על הצגות של S_n נראה

שההצגות האי-פריקות (מעל $\mathbb{C}$) של S_n

מתאימות לחלוקות $\lambda \vdash n$ ומימד ההצגה

המתאימה ל- λ הוא f^λ.

<u>דוגמא</u>: $\lambda=(3,3)\vdash 6$

$$\left.\begin{array}{ccc}
\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\ \hline 4&5&6\\ \hline\end{array} &
\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&4\\ \hline 3&5&6\\ \hline\end{array} &
\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&5\\ \hline 3&4&6\\ \hline\end{array} \\[1em]
\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&4\\ \hline 2&5&6\\ \hline\end{array} &
\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&5\\ \hline 2&4&6\\ \hline\end{array} &
\end{array}\right\} \Rightarrow f^{(3,3)}=5$$

באופן כללי, ברור שאפשר להשיג נוסחה <u>רקורסיבית</u> עבור f^λ

כיוון שהמספר n חייב להופיע בתא פינתי של

הדיאגרמה.

(= משבצת אחרונה בשורה ובעמודה שלה).

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \ & \ & \ & x \\ \hline \ & \ & x \\ \cline{1-3} x \\ \cline{1-1}\end{array}$$

$\boxed{x}$ = פינה דרום-מזרחית

$$f^{(4,3,1)} = f^{(3,3,1)} + f^{(4,2,1)} + f^{(4,3)}$$

(קל לבדוק).

נוסחה כללית עבור f^λ נמצאה לפני

יותר מ- 100 שנה.

משפט 1: (נוסחת מכפלה) [Frobenius, 1900]

יהי $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_t)$ חלוקה ($\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_t \geq 0$)

נסמן:

$$l_i := \lambda_i + t - i \qquad (1 \leq i \leq t)$$

אזי

$$\boxed{f^\lambda = \frac{|\lambda|!}{\prod_{i=1}^{t} l_i!} \prod_{\substack{(i,j)\\ i<j}} (l_i - l_j)}$$

(כאשר $|\lambda| = \lambda_1 + \dots + \lambda_t$)

דוגמא:

$$\lambda = (\underset{i=1}{3}, \underset{i=2}{2}, \underset{i=3}{2})$$

$$|\lambda| = 3+2+2 = 7$$

$$\cancel{f^\lambda} \quad \Longleftarrow \quad (l_1, l_2, l_3) = (5,3,2)$$

$$f^\lambda = \frac{7!}{5!\,3!\,2!}(5-3)(5-2)(3-2) = \frac{7\cdot 6}{6\cdot 2}\cdot 2\cdot 3\cdot 1 = 21$$

הנוסחה המפורסמת ביותר עבור f^λ היא

נוסחת אורכי הווים ("וו")

(HLF = Hook Length Formula)

$$\Downarrow$$

הגדרה:

יהא c תא (משבצת) בדיאגרמה $[\lambda]$,
הוו (hook) של c, H_c, הוא קבוצת התאים
ב-$[\lambda]$ שהם c עצמו, או בשורה של c מימינו,
או בעמודה של c מתחתיו.

אורך הוו של c הוא גודל הקבוצה: $h_c = |H_c|$

דוגמא:

	⊗	x	x	
	x			

⊗ = התא c

x = תאי הוו H_c

$$h_c = |H_c| = 4$$

משפט 2 (נוסחת אורכי הוו) [Frame-Robinson-Thrall] 1954
Hook length formula

$$\boxed{f^\lambda = \frac{|\lambda|!}{\prod_{c \in [\lambda]} h_c}}$$

דוגמא קלה:

$$\lambda = (3,2,2)$$

נרשום בכל תא c את h_c:

5	4	1
3	2	
2	1	

$$\Rightarrow \quad f^\lambda = \frac{7!}{5\cdot 4\cdot 1\cdot 3\cdot 2\cdot 2\cdot 1} = \frac{7\cdot 6}{2} = 21$$

ישנה גם נוסחה שקולה:

משפט 3 (נוסחת פרובניוס):

$$\boxed{f^\lambda = |\lambda|! \cdot \det\left(\frac{1}{(\lambda_i - i + j)!}\right)_{i,j=1}^{t}}$$

עם המוסכמה: $\frac{1}{k!} = 0$ אם k שלילי.

בדוגמא הנ"ל: $\lambda = (3,3,1)$

$$f^{\lambda} = 7!\begin{vmatrix} \frac{1}{3!} & \frac{1}{4!} & \frac{1}{5!} \\ \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} \\ \frac{1}{0!} & \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} \end{vmatrix} = 7\cdot 6\begin{vmatrix} 5\cdot 4 & 5 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} =$$

(הערה: לראות [illegible] בהוכחה:
וראים באלכסון הראשי [illegible]
[illegible]
[illegible])

$$= 7\cdot 6\left[5\cdot 4\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right) - 5\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right) + 1\left(1-\frac{1}{2}\right)\right] =$$

$$= 7\cdot 6\left[\frac{5}{3} - \frac{5}{3} + \frac{1}{2}\right] = 21$$

טענה: הנוסחאות בסעיפים של משפטים 1,2,3 שוות זו לזו.
(הראשון והשני שווים זה לזה).

הוכחה:

① משפט ה"ו שקול למשפט ב, כלומר: לכל λ

$$\frac{|\lambda|!}{\prod_{c\in[\lambda]} h_c} = \frac{|\lambda|!}{\prod_{i=1}^{t} l_i!}\cdot\prod_{i<j}(l_i - l_j)$$

באופן שקול, נוכיח:

$$\prod_{c\in[\lambda]} h_c = \frac{\prod_{i=1}^{t} l_i!}{\prod_{i<j}(l_i - l_j)}$$

(כאשר $l_i = \lambda_i + t - i$)

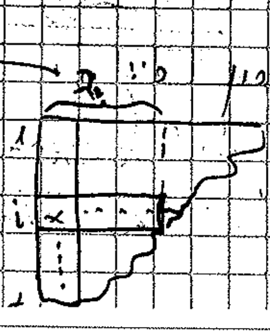
לשם כך, מספיק להוכיח:

$$(*)\qquad \prod_{i=1}^{t} h_{(i,1)} = \prod_{i=1}^{t} l_i$$

אורכי הווים של משבצות בעמודה 1

הסבר (*) [illegible]

$$h_{(i,1)} = \lambda_i + \underbrace{t - i}_{} = l_i$$



אז כי מספיק באופן אינדוקטיבי על מספר
העמודות ב-λ. אם $\tilde{\lambda}$ היא הצורה שמתקבלת
שלה ע"י מחיקת העמודה הראשונה ב-$[\lambda]$

אז

$$\prod h_c = \prod_{c\in[\tilde{\lambda}]} h_c \cdot \prod_{i=1}^{t} h_{(i,1)}$$

ה"א לפי
בעמודה 1

אורך וו
ב-$[\lambda]$

נשים לב ש: $\tilde{\lambda}_i=\lambda_i-1$ ולכן גם $\tilde{l}_i = l_i - 1$
$(1\le i\le t)$ ולכן

$$\frac{\prod_i l_i!}{\prod_{i<j}(l_i-l_j)} = \frac{\prod_i \tilde{l}_i!}{\prod_{i<j}(\tilde{l}_i-\tilde{l}_j)}\cdot\prod_i l_i$$

נקודה עדינה:

יתכן שחלק מ- $\tilde{l}_i$ הם אפסים (ולא שלמים חיוביים)
ויש להראות על כן את הנוסחה שהוספה
כמה ערכים $\lambda_{t+1}=\dots=\lambda_{t+k}=0$ אינה משנה את
ערך אגף ימין בנוסחה 1
(כלומר: בנוסחה 1 מספיק להניח $\lambda_1\ge\dots\ge\lambda_t\ge 0$)

נראה מה קורה בהוספת רכיב $\lambda_{t+1}=0$
(המעבר מ- t ל- $(t+1)$ בה"א ימין של נוסחה 1.
המספרים החדשים הם l_i:

$$\bar{l}_i = \lambda_i + (t+1) - i = l_i + 1 \qquad (1\le i\le t)$$

$$\bar{l}_{t+1} = \lambda_{t+1} + (t+1) - (t+1) = \lambda_{t+1} = 0$$

קל להוו[illegible] שפר[illegible]:

$$\frac{\prod_i \bar{l}_i!}{\prod_{i<j}(\bar{l}_i-\bar{l}_j)} = \frac{\prod_{i\le t}(l_i+1)!\cdot 0!}{\prod_{i<j\le t}(l_i-l_j)\cdot \prod_{i\le t,\ (j=t+1)}(l_i+1)} = \frac{\prod_i l_i!}{\prod_{i<j}(l_i-l_j)}$$

2. משפט 1 שקול למשפט 3, כלומר: לכל λ

$$|\lambda|!\cdot \det\left[\left(\frac{1}{(\lambda_i+t-i)!}\right)_{i,j=1}^{t}\right] = \frac{|\lambda|!}{\prod_i l_i!}\prod_{i<j}(l_i-l_j)$$

במובן,

$$\lambda_i - i + j = l_i - t + j$$

ולכן צ"ל:

$$\det\left[\left(\frac{1}{(l_i-t+j)!}\right)_{i,j}\right] = \frac{\prod_{i<j}(l_i-l_j)}{\prod_i l_i!}$$

נכפיל את השורה i במטריצה ב $l_i!$ ונקבל שמספיק להוכיח:

$$\det\left[\left(\frac{l_i!}{(l_i-t+j)!}\right)_{i,j}\right] = \prod_{i<j}(l_i-l_j)$$

נשתמש בסימון:

$$(a)_k := \prod_{i=1}^{k-1}(a-i) = a(a-1)\cdots(a-k+1)$$

(K שלם אי-שלילי, a מרוכב).

האיבר הכללי במטריצה

$$\frac{l_i!}{(l_i-t+j)!} = (l_i)_{t-j}$$

<u>דרך להוכחה:</u>

$$\begin{vmatrix} (l_1)_{t-1} & (l_1)_{t-2} & \cdots & (l_1)_1 & (l_1)_0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ (l_t)_{t-1} & (l_t)_{t-2} & \cdots & (l_t)_1 & (l_t)_0 \end{vmatrix} \overset{?}{=} \prod_{i<j}(l_i-l_j)$$

קל לראות שע״י פעולות עמודה מתאימות, נקבל שזהו הופך ל:

$$\begin{vmatrix} l_1^{t-1} & \cdots & l_1^1 & l_1^0 \\ \vdots & & & \vdots \\ l_t^{t-1} & \cdots & l_t^1 & l_t^0 \end{vmatrix}$$

וזו דטרמיננטת ונדרמונדה המפורסמת, שערכה כידוע $\prod_{i<j}(l_i-l_j)$.

<u>ביתר פרוט:</u>

$(a)_k$ הוא פולינום מתוקן ב-a ממעלה k שמקדמיו תלויים ב-k.

בכל עמודה של המטריצה נמצא אותו פולינום (אך המשתנה l_i תלוי בשורה i), שמעלותיהם, מימין לשמאל, הן $0,1,\dots,t-1$.

ע״י חיסור כפולה מתאימה של $(l_i)_0=1$ נסלק את המקדמים של l_i^0 בעמודות 1 עד $t-1$, אח״כ נשתמש ב-$(l_i)_1$ המתוקן, שהוא l_i, לסלק את מקדמי l_i^1 בעמודות 1 עד $t-2$ וכו׳.

הוכחנו שמשפטים 1, 2, 3 שקולים.

ניתן להראות שהם נכונים, כלומר:

(היינו נוסחאות (שוות) עבור f^λ.

(שהם נכונות ע"י הכללה.

<u>הגדרה</u>: יהיו λ, μ חלוקות כך ש- $[\mu] \subseteq [\lambda]$

(הכלה של דיאגרמות)

כלומר $\mu_i \le \lambda_i$ ($\forall i$, כולל הגדרה $\mu_i = 0$ עבור ערכי i שעבורם μ_i לא מוגדר).

הדיאגרמה (הפרש) מצורפת (Skew Shape) λ/μ

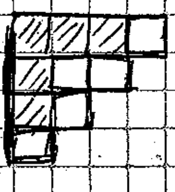
היא הפרש הקבוצות

$$[\lambda/\mu] := [\lambda]/[\mu]$$

<u>דוגמא</u>:

$\lambda = (4,3,2,1)$

$\mu = (3,1,1)$



$[\lambda/\mu]$

כמובן, דיאגרמה רגילה $[\lambda]$ היא מקרה פרטי של דיאגרמת הפרש, כאשר $\mu = \emptyset$.

<u>הערה</u>:

דיאגרמת הפרש אינה מגדירה את λ, μ באופן יחיד (למשל, אפשר להוסיף שורה ארוכה שווה בהתחלה).

ט"ס (SYT) מדורת הפרש λ/μ מוגדרת באופן הטבעי: מילוי תאי הדורה ע"י $1,\dots,n$ ($|\lambda/\mu| = n$) כך שכל ערך מופיע פעם אחת והערכים בכל שורה עולים משמאל לימין ובכל עמודה עולים מלמעלה למטה.

סימון:

$f^{\lambda/\mu}$ = מס' הטבלאות מצורה λ/μ (הכללה של f^{λ})

המשפט הבא, הוא הכללה של
את — בלבד מ-3 הנוסחאות שראינו
עבור f^{λ}: הנוסחה הדטרמיננטית.

משפט 4: [Aitken 1943, Feit 1953]

$$\boxed{f^{\lambda/\mu} = |\lambda/\mu|! \cdot \det\left(\frac{1}{(\lambda_i-\mu_j-i+j)!}\right)_{i,j=1}^{t}}$$

בהמשך נוכיח את משפט 4, ואז נקבל
את משפט 3 (וא— קודמין)
כמקרה פרטי $\mu=\emptyset$.