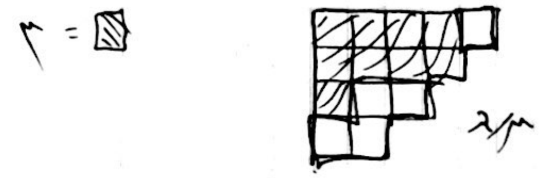
תזכורת:

צורת הפרש (skew shape) היא:

$$[\lambda/\mu] := [\lambda]\setminus[\mu]$$

(הפרש קבוצות) כאשר $[\mu]\subseteq[\lambda]$ דיאגרמות רגילות
(כלומר: $\mu_i \le \lambda_i \ \forall i$)

דוגמא:



משפט: [Aitken 43', Feit 53']

לכל צורת הפרש λ/μ, מס' הטבלאות:

$$f^{\lambda/\mu} = |\lambda/\mu|!\ \det\left[\left(\frac{1}{(\lambda_i - i - \mu_j + j)!}\right)_{i,j}\right]$$

עם המוסכמה $\frac{1}{k!}=0$ עבור k שלם שלילי.

נוכיח משפט זה, ונסיק (עבור $\mu=\emptyset$)
נקבל הוכחה של 2 הנוסחאות עבור צורה
רגילה λ (כולל: נוסחת אורכי הווים
Hook Length Formula)

הוכחה: (בעקבות Feit)

באינדוקציה על גודל הדיאגרמה: $n=|\lambda/\mu|$

$n=0$: אז $\mu=\lambda$.

נסמן $a_{ij} = \frac{1}{(\lambda_i-i-\mu_j+j)!}$

(האיבר הכללי במטריצה שבמשפט)

הערה: (לגבי פרשנות אפשרית של $f^{\lambda/\mu}$)

כמו שט"ס מצורה λ ⟷ מסילה באורך $|\lambda|$ בגרף יאנג מ-$\emptyset$ (האיבר הריק) ל-λ,

כך ט"ס מצורה λ/μ ⟷ מסילה באורך $|\lambda/\mu|$ בגרף יאנג מ-μ ל-λ.

$f^{\lambda/\mu}$ = מס' המסלולים (שרשראות מקסימליות) בקטע $[\mu,\lambda]$ בגרף יאנג.

נחזור להוכחה:

- $$i=j \Rightarrow a_{ii}=\frac{1}{(\lambda_i-\mu_i)!}=\frac{1}{0!}=1$$

$$i>j \Rightarrow \lambda_i-i-\mu_j+j<\lambda_i-\mu_j\le\lambda_j-\mu_j=0$$

ולכן $a_{ij}=0$.

לכן, המטריצה במקרה זה ($n=0$) היא משולשית עליונה עם 1 באלכסון ושבלים אפס:

- $$|\lambda/\mu|!\cdot\det A=1 \quad \Big(=|\underbrace{f^{\lambda/\mu}}_{\text{טבלה ריקה}}|\Big)$$

שלב האינדוקציה:

נניח שהנוסחה נכונה לדיאגרמות בגודל $n-1$, ונוכיח אותה לדיאגרמה $[\lambda/\mu]$ בגודל n.

בכל ט"ס מצורה λ/μ, המספר הגדול ביותר n $(=|\lambda/\mu|)$ נמצא במשבצת פינתית דרום-מזרחית

(כלומר: משבצת אחרונה בשורה וגם בעמודה שלה)

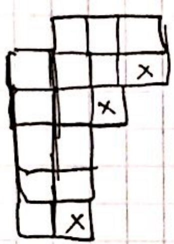
לכן
$$f^{\lambda/\mu}=\sum_i f^{(\lambda/\mu)_i}$$

כאשר הסכום הוא על כל השורות i שבהן יש פינה דרום מזרחית

(כלומר: המספר האחרון בשורה i הוא גם האחרון בטור שלה).

$(\lambda/\mu)_{i'}$ היא הצורה המתקבלת מהורדת פינה זו.

דוגמה:



באופן מפורש:

מסכמים על ערכי i' שעבורם

$\lambda_i > \lambda_i$ (אי שוויון) וגם $\lambda_{i'} > \mu_{i'}$ (שורה i' לא ריקה).

לפי הנחת האינדוקציה,

$$f^{\lambda/\mu} = (n-1)! \sum_{i'} \det\left(a_{ij}^{(i')}\right) \qquad (*)$$

כאשר

$\left(a_{ij}^{(i')}\right)_{ij}$ היא המטריצה המתאימה ל $(\lambda/\mu)_{i'}$

במפורש

$$(**) \quad a_{ij}^{(i')} = \begin{cases} a_{ij}, & i \neq i' \\ a_{ij} \cdot (\lambda_i - i - \mu_j + j), & i = i' \end{cases}$$

נוסחאות אלו נכונות גם כאשר $\lambda_i - i - \mu_j + j$ שלילי או אפס.

<u>טענה 1</u>:

הנוסחה $(*)$ נכונה גם על כל ערכי $1 \leq i' \leq t$

(t = מס' השורות במטריצה), לפי נוסחה $(**)$.

<u>הוכחת טענה 1</u>:

נניח שאם i' לא מקיימת $\lambda_i > \lambda_{i+1} \wedge \lambda_{i'} > \mu_i$

אז $\det\left(a_{ij}^{(i')}\right) = 0$.

לפי ההנחה $\lambda_{i'} = \lambda_{i'+1}$ או $\lambda_{i'} = \mu_{i'}$.

אם $\lambda_{i'} = \lambda_{i'}+1$ אז

$$\lambda_{i'+1} - (i'+1) - \mu_j + j = (\lambda_{i'} - i' - \mu_j + j) - 1$$

נשים לב ש $(\lambda_{i'}-1)$ הוא הערך החדש של $\lambda_{i'}$ במטריצה $(a_{ij}^{(i')})$, ולכן במטריצה זו יש שתי שורות שוות. לכן $\det(a_{ij}^{(i')})=0$.

אם $\lambda_{i'} = \mu_{i'}$ אז

$$j \le i' < i \Longrightarrow \lambda_i - i - \mu_j + j < \lambda_i - \mu_j \le \lambda_i - \mu_{i'} \le \lambda_{i'} - \mu_{i'} = 0$$

$$j \le i' = i \Longrightarrow (\lambda_{i'} - 1) - i' - \mu_j + j < \lambda_{i'} - \mu_j \le \lambda_{i'} - \mu_{i'} = 0$$

כלומר $a_{ij}^{(i')}=0$ לכל $j \le i' \le i$, שהוא תת-מטריצה מלבנית בגודל $i' \times (t-i'+1)$; ובהגדרת הדטרמיננטה מתאפס כי אין תמורה $\sigma \in S_n$ המקיימת $j=\sigma(i) > i'$ לכל $i \ge i'$ (עקרון שובך היונים) ■

(סיימנו את הוכחת טענה 1)

<u>טענה 2</u>:

אם נסמן $c_i = \lambda_i - i$, $d_j = \mu_j - j$,

A_{ij} = הקו-פקטור ה-(i,j) של A

(כלומר $\det(A) = \sum_j a_{ij} A_{ij}$)

אז

$$\det(a_{ij}^{(i')}) = \sum_j (c_{i'} - d_j) a_{i'j} A_{i'j}$$

<u>הזכרה</u>:

פיתוח לפי שורה i: $\det A = \sum_j a_{ij} A_{ij}$

פיתוח לפי עמודה j: $\det A = \sum_i a_{ij} A_{ij}$

ולכן, אם נפתח לפי שורה i':

$$\det\left(a_{ij}^{(i')}\right) = \sum_j a_{i'j}^{(i')} A_{i'j} \quad \leftarrow \text{לא השתנה}$$

$$= \sum_j (\lambda_{i'} - i' - \mu_j + j)\, a_{i'j} A_{i'j}$$

$$= \sum_j (c_{i'} - d_j)\, a_{i'j} A_{i'j}$$

(סוף הוכחת טענה 2)

סוף הוכחת המשפט:

$$f^{\lambda/\mu} \overset{\text{טענה 1}}{=} (n-1)! \sum_{i'} \det\left(a_{ij}^{(i')}\right)$$

$$\overset{\text{טענה 2}}{=} (n-1)! \sum_{i'} \sum_j (c_{i'} - d_j)\, a_{i'j} A_{i'j}$$

$$= (n-1)! \sum_{i'} c_{i'} \Big(\sum_j a_{i'j} A_{i'j}\Big) - (n-1)! \sum_j d_j \Big(\sum_{i'} a_{i'j} A_{i'j}\Big)$$

$$= (n-1)! \sum_{i'} c_i \det A - (n-1)! \sum_j d_j \cdot \det A =$$

$$= (n-1)! \det A \cdot \Big(\sum_{i'=1}^{t} c_{i'} - \sum_{j=1}^{t} d_j\Big) =$$

$$= (n-1)! \cdot \det A \cdot \Big(\sum_{i=1}^{t} (\lambda_i' - \cancel{i'}) - \sum_{j=1}^{t} (\mu_j - \cancel{j})\Big) =$$

$\sum \lambda_i' - \sum \mu_j = |\lambda/\mu| = n$

$$= n(n-1)! \cdot \det A =$$

$$= n! \det A$$

לנוסחת אורכי הווים (HLF) נמצאו, במהלך השנים,
הוכחות רבות. חלקן קומבינטוריות
(רושמים את הנוסחה כשוויון בין שני מספרים
שלמים, ואז מראים ששני המספרים הם גדלים
של שתי קבוצות שוות גודל).
אחת ההוכחות היא הסתברותית, ומאפשרת
לייצר ט"ס אקראית מצורה נתונה λ.

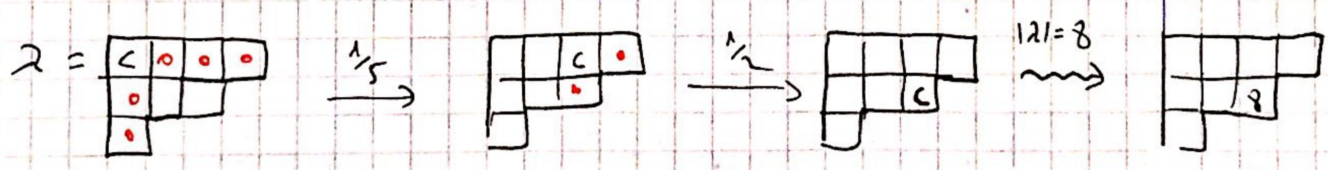
אלגוריתם: [Greene - Nijenhuis - Wilf, 1979]
(לייצור ט"ס אקראית מצורה נתונה λ)

פתיחה: אנו נמצאים בתא c, שהוא
הפינה הצפון-מערבית של λ.
מבצעים איטרציות על התהליך הבא:

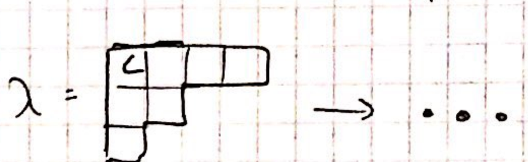
* אם c הוא פינה דרום-מזרחית, רושמים בתוכה $|\lambda|$,
מורידים משבצת זו מהדיאגרמה וחוזרים לנקודת
הפתיחה עם הדיאגרמה המוקטנת.

* אחרת - ה- H_c כולל יותר ממשבצת אחת.
מגרילים, בהתפלגות אחידה, את אחת ממשבצות H_c
שאינה c, וקופצים למשבצת החדשה c.

דוגמה למהלך אפשרי:



כעת נמשיך את התהליך עם



משפט [GNW 79']:

בתהליך זה, כל ט"ס מצורה λ מתקבל
באותה הסתברות $p=\frac{1}{n!}\prod_{c\in[\lambda]} h_c$

[ומכאן הוכחה לנוסחת אורכי הווים:

$$f^{\lambda}=\frac{1}{p}=\frac{n!}{\prod_{c\in[\lambda]} h_c}$$
]

(להוכחה - עיינו במאמר המקורי או בספר של Sagan)

<u>דוגמא</u>: (לחישוב הסתברות)

$$\lambda=\begin{array}{|c|c|c|}\hline &&\\\hline &\multicolumn{2}{c}{}\\\cline{1-1}\end{array}$$

מס' הט"ס האפשריים $=3$ $\quad (f^{\lambda=(3,1)}=3)$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 4&\multicolumn{2}{c}{}\\\cline{1-1}\end{array}\qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&4\\\hline 3&\multicolumn{2}{c}{}\\\cline{1-1}\end{array}\qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&4\\\hline 2&\multicolumn{2}{c}{}\\\cline{1-1}\end{array}$$

לפי המשפט, האלגוריתם נותן כל אחת מהן
בהסתברות $\frac{1}{3}$

מה ההסתברות של מיקום $\underline{\underline{4}}$ בשלב הראשון?

$$\underset{1/3}{\begin{array}{|c|c|c|}\hline &&\\\hline 4&\multicolumn{2}{c}{}\\\cline{1-1}\end{array}}\qquad \underset{2/3}{\begin{array}{|c|c|c|}\hline &&4\\\hline &\multicolumn{2}{c}{}\\\cline{1-1}\end{array}}$$

ובדוק למשל: $p\left(\begin{array}{|c|c|c|}\hline c&&\\\hline &\multicolumn{2}{c}{}\\\cline{1-1}\end{array}\right)=\frac{1}{3}$

$$p\left(\begin{array}{|c|c|c|}\hline &&4\\\hline &\multicolumn{2}{c}{}\\\cline{1-1}\end{array}\right)=p\left(\begin{array}{|c|c|c|}\hline c&&\bullet\\\hline &\multicolumn{2}{c}{}\\\cline{1-1}\end{array}\right)+p\left(\begin{array}{|c|c|c|}\hline c&\bullet&\\\hline &\multicolumn{2}{c}{}\\\cline{1-1}\end{array}\right)\cdot p\left(\begin{array}{|c|c|c|}\hline &c&\bullet\\\hline &\multicolumn{2}{c}{}\\\cline{1-1}\end{array}\right)$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{2}{3}$$

<u>שאלה</u> :

איך ניתן להגדיר התפלגות אחידה ט״ס מצורות הפרש μ/λ ?

טבלאות סטנדרטיות למחצה ופונקציות שור

(תזכורת) <u>הגדרה</u> :

תהי λ חלוקה של n. <u>טבלת יאנג סטנדרטית למחצה</u> (ט״ס״ל) (Semi-Standard Young Tableau) מצורה λ היא מילוי של משבצות הדיאגרמה $[\lambda]$ במספרים טבעיים $(1,2,\dots)$ (מותרות חזרות)

כך ש:

(*) הערכים בכל שורה עולים <u>חלש</u> משמאל לימין

(*) " " עמודה עולים <u>חזק</u> מלמעלה למטה

<u>דוגמא</u>:

$$\lambda=(4,3,3,2)$$

1	1	2	3
2	3	3	
3	4	7	
4	6		

<u>נסמן</u>:

$SSYT(\lambda) =$ אוסף ט״ס״ל מצורה λ.

לכל $T\in SSYT(\lambda)$ נסמן:

$$X^T = x_1^{n_1(T)}\cdot x_2^{n_2(T)}\cdots = \prod_{i=1}^{\infty} x_i^{n_i(T)}$$

כאשר $x_1,x_2,\dots$ משתנים

$n_i(T) =$ מס׳ ההופעות של i בטבלה T.

X^T הוא מונום ממעלה $|\lambda|$.

הגדרה:

פונקציית שור (Schur) המתאימה ל-λ הוא
הסכום הפורמלי (האינסופי)

$$S_\lambda = \sum_{T\in SSYT(\lambda)} x^T$$

דוגמאות:

$$\lambda=\emptyset \ : \ S_\emptyset = \sum_{\text{ריק}} x^T = \prod_{i=1}^{\infty} x_i^0 = 1$$

$$\lambda=1 \ : \ S_{(1)} = x_1+x_2+x_3+\dots$$

$$\boxed{}\boxed{} \quad \lambda=2 \ : \ S_{(2)} = x_1^2+x_1x_2+x_1x_3+\dots+x_2^2+x_2x_3+\dots = \sum_{1\le i_1\le i_2} x_{i_1}x_{i_2}$$

באופן כללי, עבור שורה $\lambda=(n)$:

$$(h_n=)\ S_{(n)} = \sum_{1\le i_1\le\dots\le i_n} x_{i_1}\cdots x_{i_n}$$

פונקציה זו נקראת <u>הפונקציה הסימטרית ההומוגנית</u> מסדר n.

<u>מה לגבי עמודה?</u> למשל:

$$\lambda=(1^2)=(1,1) \ : \ S_{(1^2)} = x_1x_2+x_1x_3+\dots x_2x_3+\dots$$

<u>ובאופן כללי</u>:

$$(e_n=)\ S_{(1^n)} = S_{\underbrace{(1,\dots,1)}_{n\text{ פעמים}}} = \sum_{1\le i_1<\dots<i_n} x_{i_1}\cdots x_{i_n}$$

פונקציה זו נקראת <u>הפונקציה הסימטרית האלמנטרית</u> מסדר n.

הערה :

אם $x_1,\dots,x_n$ הם שורשי פולינום

$$p(t)=\prod_{i=1}^{n}(t-x_i)$$

אז המקדמים הם :

$$p(t)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^n e_i(x_1,\dots,x_n,0,\dots)\,t^{n-i}$$

$$=\underset{\substack{\| \\ 1}}{e_0}t^n-e_1t^{n-1}+\dots+(-1)^n e_n$$