החבורה הסימטרית

תת-חבורות והצמדה ב-S_n

(על-פי: Halmos, p. 81; Van der Waerden vol. 1, p. 149)

משפט: [Cayley] כל חבורה סופית G איזומורפית לתת-חבורה של S_n, עבור n מתאים.

הוכחה: נקח $n=|G|$. G פועלת על עצמה ע"י:

$$\rho: G \to S_n,\quad g \mapsto \rho_g \qquad \rho_g(x) := g\cdot x \quad (\forall x\in G) \qquad \text{(left-regular rep.)}$$

לחילופין: $\lambda_g(x) := xg^{-1}$ $(\forall x\in G)$. □

נובע מכאן שאוסף התת-חבורות של S_n הוא עשיר מאוד.
מה לגבי תת-חבורות **נורמליות**?

הגדרה: תת H של חבורה G נקראת **נורמלית** אם

$$g\in G,\ h\in H \Rightarrow ghg^{-1}\in H$$

כלומר: $(\forall g\in G)\ gHg^{-1}\subseteq H$; באופן שקול: $(\forall g\in G)\ gHg^{-1}=H$.

משפט 1: ל-$n\neq 4$, אם H תת נורמלית של S_n אז H הינה $\{id\}$, A_n או S_n.
A_n (alternating gp.) (אוסף התמורות הזוגיות ב-S_n).

משפט 2: לכל $n\geq 5$, A_n היא חבורה **פשוטה** (simple). (גם ל-$1\leq n\leq 3$ אבל אז היא ציקלית)

נוכיח את משפט 2 (הוכחת משפט 1 דומה, ותינתן כתרגיל).

(ידוע) **טענה 1:** אם $\pi,\sigma\in S_n$ כאשר $\sigma=(i_{11},i_{12},\dots)(i_{21},i_{22},\dots)\cdots$
אז: $\pi\sigma\pi^{-1}=(\pi(i_{11}),\pi(i_{12}),\dots)(\pi(i_{21}),\pi(i_{22}),\dots)\cdots$

מסקנה: מחלקת-צמידות ב-S_n מאופיינת ע"י **ארכי המחזורים** (בפירוק למחזורים זרים).

[תרגיל: אפיין מחלקת-צמידות ב-A_n]

טענה 2: לכל $n\geq 3$, המחזורים $(123),(124),\dots,(12n)$ יוצרים את A_n.

הוכחה: באינדוקציה על n: $(1,2,n)^{-1}(1,2,\sigma(n))\sigma$ מעתיקה את n לעצמו. □
(אם $\sigma(n)\neq 1,2$)

טענה 3: לכל $3\le n$, אם H ת"ח נורמלית של A_n המכילה 3-מחזור, אז $H=A_n$.

הוכחה: נניח בה"כ: $(123)\in H$. אם $n=3$ אז ~~[illegible]~~

$|A_3|=3$ ולכן נוצרת ע"י (123): $A_3=\{id,(123),(132)=(123)^2\}$.

נניח $n\ge 4$. לכל $4\le k\le n$ נגדיר: $\pi_k:=(12)(3k)\in A_n$.

אזי: $(21k)=\pi_k(123)\pi_k^{-1}\in H$ (כי $H\lhd A_n$),

ולכן גם $(12k)=(21k)^2\in H$ לכל $4\le k\le n$ (וגם ל-$k=3$).

לפי טענה 2, $H=A_n$. ∎

הוכחת משפט 2:

תהי H תת-חבורה נורמלית של A_n $(n\ge5)$, $H=\{id\}$. נוכיח: $H=A_n$.

תהי $id\neq\sigma\in H$ תמורה עם מספר מירבי של נקודות-שבת.

נראה ש-σ היא 3-מחזור (ואז נשתמש בטענה 3).

על דרך השלילה: נניח ש-σ אינה 3-מחזור (כמובן גם אינה 2-מחזור

כי $\sigma\in A_n$). אזי: א] ש-σ מכילה (בפירוק למחזורים זרים) k-מחזור

עם $k\ge5$: $\sigma=(12345\ldots)\cdots$

ב] ש-σ מכילה 4-מחזור, אך אינה שווה לו (כי הוא אי-זוגי):

$\sigma=(1234)(56\ldots)\cdots$

ג] ש-σ מכילה 3-מחזור, אך אינה שווה לו:

$\sigma=(123)(456)\cdots$

$(123)(45)\cdots$

ד] ש-σ מכילה רק 2-מחזורים, ומספרם ≥2:

$\sigma=(12)(34)(5\ldots)\cdots$

$(12)(34)(56)\cdots$

עבור $\pi=(345)$ נקבל במקרים הנ"ל, בהתאמה:

$\sigma_1:=\pi\sigma\pi^{-1}=(12453\ldots)\cdots$, $\sigma^{-1}\sigma_1=(235)$

$(1245)(36\ldots)\cdots$ (23546)

$(124)(536)\cdots$ (43526)

$(124)(53)\cdots$ $(25)(34)$

$(12)(45)(3)\cdots$ (345)

$(12)(45)(36)\cdots$ $(35)(46)$

בכל מקרה, ל-$\sigma^{-1}\sigma_1$ $(\neq id)$ יש יותר נקודות-שבת מאשר ל-σ. סתירה. ∎

הערה: עבור $n=4$, $\{id,(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$ היא נורמלית ב-A_4 (וגם ב-S_4).