בס"ד

תורת המספרים (89-256)

תרגיל 2

1. יהי $N>1$. הוכח שאם $a\equiv b \bmod N$, אז $(a,N)=(b,N)$. כאן $a,b\in\mathbb{Z}$. הסק שאם a זר ל-N, אז כל איבר של המחלקה $a+N\mathbb{Z}$ זר ל-N.

2. יהי $p\in\mathbb{N}$ כך שהמספרים p, p^2+2 שניהם ראשוניים. הוכח כי $p=3$.

3. יהיו $n,a,b\in\mathbb{N}$. הוכח שאם $b|a$, אז $(n^b-1)|(n^a-1)$.

4. תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ הסדרה $a_1=1$, $a_2=11$, $a_3=111$, $a_4=1111$, ... הוכח שהמספר $a_n\in\mathbb{Z}$ הינו ריבוע מושלם אם ורק אם $n=1$.

5. הוכח שהזוג היחיד $(x,y)\in\mathbb{N}^2$ שמקיים
   א) $x>1$, $y>1$
   ב) $3^x-2^y=1$

   הינו $(x,y)=(2,3)$.

6. תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ הסדרה המוגדרת באופן הבא: יהי $a_1=0$, $a_2=1$. אם $n\geq 3$, אז a_n מתקבל באופן הבא: רושמים את a_n בבסיס 10, ומיד אחריו את a_{n-1} לצדו.

$$a_3=10$$
$$a_4=101$$
$$a_5=10110$$
$$a_6=10110101$$
$$a_7=1011010110110$$

וכן הלאה. הוכח כי $a_n\equiv 0 \bmod 11$ אם ורק אם $n\equiv 1 \bmod 6$.