תורת המספרים (89256)
תרגיל 1

1. יהי p מספר ראשוני. הוכח שאם p^2+2 גם כן ראשוני, אזי $p=3$.
2. הוכח שאם $a \equiv b \bmod n$, אזי $(a,n)=(b,n)$.
3. השתמש באלגוריתם של איקלידוס כדי למצוא $(2018, 5778)$.
4. הוכח שהשלשיה היחידה של מספרים שלמים שמקיימת $a^2+b^2=3c^2$ הינה $(a,b,c)=(0,0,0)$.
5. יהי p ראשוני. הוכח שהשלשיה היחידה של מספרים שלמים שמקיימת $a^3+pb^3+p^2c^3=0$ הינה $(a,b,c)=(0,0,0)$.
6. יהיו n,a,b מספרים טבעיים. הוכח שאם $a|b$ אזי $(n^a-1)|(n^b-1)$.
7. הוכח שאם החזקות $m,n>1$ מקיימות $3^m-2^n=\pm 1$, אזי $(m,n)=(2,3)$.

   המשפט הזה הוכח לראשונה על ידי רבי לוי בן גרשון בדרום צרפת במאה ה־14 למניינם.

   רמז: במקרה של המשוואה $3^m-2^n=1$, התבונן מודולו מספרים מתאימים והוכח כי m חייב להיות זוגי, ואילו n אי־זוגי. אזי 3^m-1 מתפרק. מה ניתן ללמוד מן הפירוק הזה?
8. התבונן בסדרה

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= 11 \\ a_3 &= 111 \\ a_4 &= 1111\ldots \end{aligned}$$

   הוכח שאם $n>1$, אזי a_n אינו ריבוע.