תורת המספרים (89256)
תרגיל 3

1. יהי n מספר טבעי כך שכל ראשוני p שמקיים $p \equiv 3 \bmod 4$ מופיע בחזקה זוגית בפירוקו של n לגורמים ראשוניים. הוכח כי n הינו סכום של שני ריבועים.

2. יהי $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ שלם של גאוס, ויהי α ראשוני כשלם של גאוס. כמו אצל מספרים שלמים, אנחנו מניחים כי α לא הפיך.

   (א) הוכח שבהכרח קיים מספר טבעי n כך ש־$\alpha | n$.

   (ב) הסק שבכרח קיים מספר ראשוני (במובן הרגיל של מספרים טבעיים) p כך ש־$\alpha | p$.

   (ג) הוכח שהראשוני p מן הסעיף הקודם הינו יחיד.

   (ד) הוכח שמתקיימת אחת משלושת האופציות הבאות:

   - $N(\alpha) = 2$.
   - $N(\alpha)$ הינו מספר ראשוני ששקול לאחד מודולו 4.
   - $N(\alpha)$ הינו ריבוע של מספר ראשוני ששקול לשלוש מודולו 4.

3. הוכח שמספר טבעי n הינו סכום של שני ריבועים אם ורק אם כל ראשוני ששקול לשלוש מודולו 4 מופיע בחזקה זוגית בפירוקו של n לגורמים ראשוניים.

4. יהי $n \leq 512$ מספר טבעי. הוכח שקיים ראשוני p כך ש־$n < p \leq 2n$.

   רמז: התבונן בראשוניים $2, 3, 5, 7, 13, 23, 43, 83, 163, 317, 631$.