תורת המספרים (89256)
תרגיל 3

1. יהי $\alpha = a + bi \in \mathbb{Z}[i]$ שלם של גאוס כך ש־$121|N(\alpha)$. הוכח כי $11|a$ וגם $11|b$.

2. פרק את $111 + 77i$ לגורמים אי־פריקים.

3. השלם של גאוס $\alpha = 34867797 - 34182196i$ מקיים $N(\alpha) = 5^{22}$. עדיף לא להאמין לי אלא לבדוק את זה, אבל העצלנים יכולים להאמין. הוכח, ללא חישובים, כי $\alpha = (1+2i)^{22}\gamma$ או $\alpha = (1-2i)^{22}\gamma$, כאשר $\gamma \in \mathbb{Z}[i]$ הפיך.

4. מדוע שני הפירוקים $7 + 6i = (2+i)(4+i) = (-1+4i)(1-2i)$ לא סותרים את היחידות של הפירוק לגורמים אי־פריקים?

5. מדוע שני הפירוקים $65 = (1+8i)(1-8i) = (7+4i)(7-4i)$ לא סותרים את היחידות של הפירוק לגורמים אי־פריקים?

6. יהי $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ שלם של גאוס בעל נורמה זוגית. הוכח כי $(1+i)|\alpha$.

7. מטרת התרגיל הזה הינה להוכיח שהפתרון השלם היחיד למשוואה

$$x^3 = y^2 + 1$$

הינו $(x, y) = (1, 0)$.

(א) יהי y מספר שלם. הוכח שאם $\gamma \in \mathbb{Z}[i]$ הינו איבר אי־פריק (ולא הפיך) שמחלק את $y + i$ וגם את $y - i$, אזי $N(\gamma) = 2$.

(ב) יהיו $x, y \in \mathbb{Z}$ כך ש־$x^3 = y^2 + 1$. הוכח שלשלמים של גאוס $y + i, y - i$ אין גורם משותף אי־הפיך.

רמז: אם יש גורם משותף כזה, אזי x זוגי.

(ג) הוכח שאם $\gamma \in \mathbb{Z}[i]$ הפיך, אזי קיים $\beta \in \mathbb{Z}[i]$ שמקיים $\gamma = \beta^3$.

(ד) הוכח שאם x, y שלמים שמקיימים $x^3 = y^2 + 1$, אזי קיים $a + bi \in \mathbb{Z}[i]$ כך ש־$y + i = (a + bi)^3$.

(ה) הוכח כי $b = \pm 1$.

רמז: השווה את החלקים הממשיים והדמיוניים של שני האגפים.

(ו) הוכח כי $b = 1$ לא יתכן, וכי אם $b = -1$, אזי $(x, y) = (1, 0)$.