

זמן המבחן: שעתיים.

מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס.

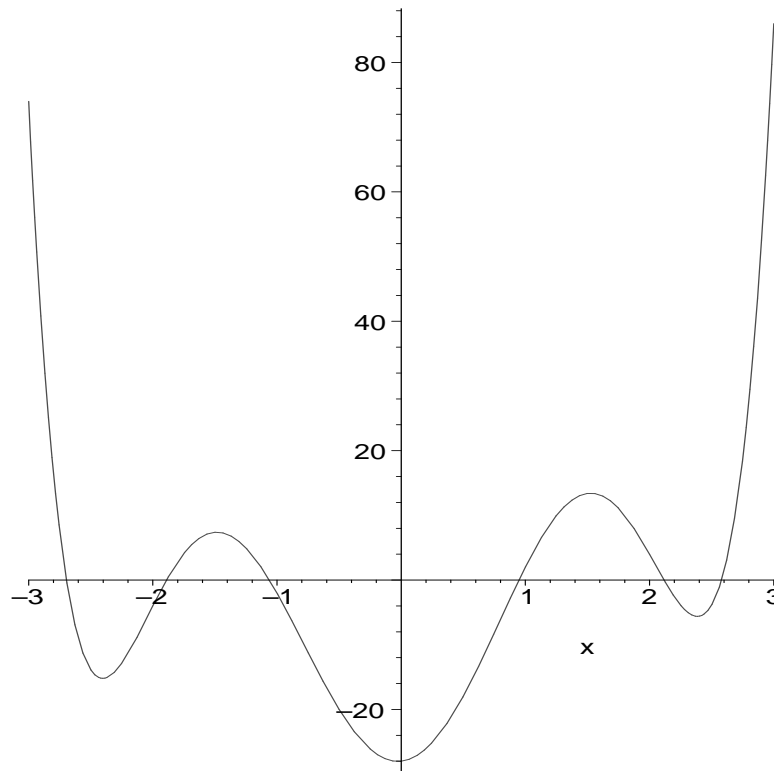
בחלק א' (50% של הציון) יש לענות על כל השאלות (ניקוד כל השאלות בחלק שווה)  
 בחלק ב' (50% של הציון) יש לענות על 2 מהשאלות (ניקוד כל השאלות בחלק שווה)

חלק א'

1. הגרף של הפונקציה

$$f(x) = x^6 - 12x^4 + 39x^2 + 2x - 28$$

נראה כך:



הסבר איך היית מוצא ל-20 ספרות דיוק

(א) את הנקודה הקריטית של הפונקציה שהיא בקטע  $2 < x < 3$

(ב) את השטח בין הגרף לציר ה- $x$  בקטע  $r_1 < x < r_2$ , כאשר  $r_1$  ו- $r_2$  הם שני שורשי הפונקציה הקרובים ל-1 ו-1 בהתאם.

2. הסבר איך היית משתמש ב-Matlab כדי למצוא גרף של הערך המינימלי של הפונקציה

$$f_t(x) = \frac{1 + t \sin x + x^4}{1 + 4x^2}$$

כפונקציה של  $t$ , בקטע  $1 < t < 4$ . (הכוונה: לכל  $t$  נתון יש ל- $f_t(x)$  שהיא פונקציה של  $x$ , ערך מינימלי. רוצים לגלות את התלות של הערך המינימלי על הפרמטר  $t$ .)

3. הסבר איך היית משתמש ב- Maple כדי למצוא את הערך של הפרמטר  $a$  כך שהפונקציה

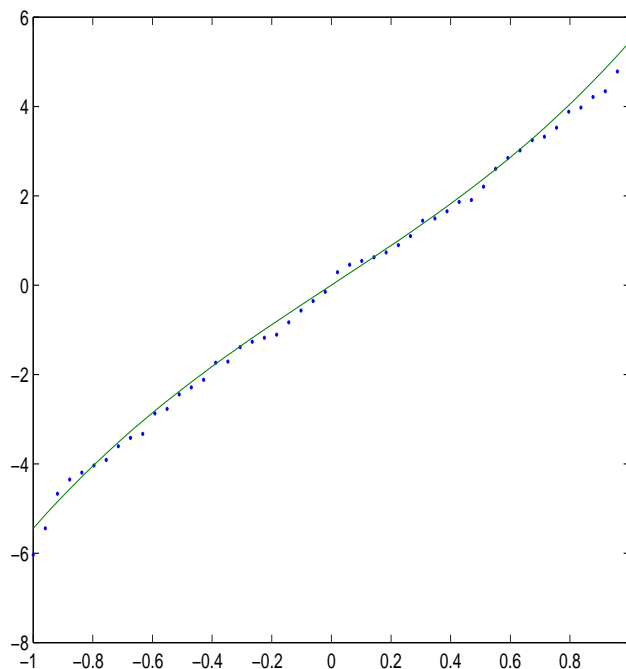
$$f(x) = \begin{cases} e^x \sin x & x \leq \frac{2\pi}{3} \\ \frac{1}{a+x^2} & x > \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

היא רציפה כאשר  $x = \frac{2\pi}{3}$ , וגם לקבל גרף של הפונקציה (עבור  $0 < x < 6$ ) כאשר  $a$  מקבל ערך זה.

4. הפקודות הבאות ב- Matlab:

```
A = rand(50, 50);
x = [-1 : 2/49 : 1];
y = eig(A + A' - 1);
z = sqrt(50) * (0.62 * x + 0.15 * x.^3);
plot(x, y, 'b.', x, z, 'r-')
```

מייצרות את הגרף הבא:



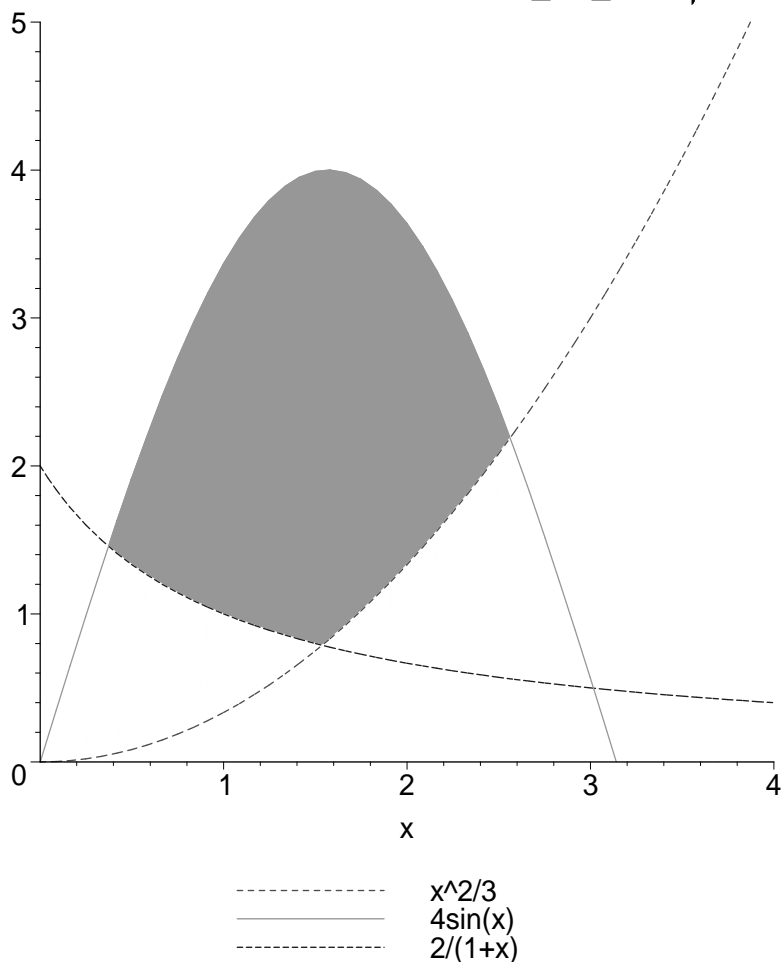
הסבר את הפקודות!

5. איך היית מוצא, ב- Maple את הקשר הנדרש בין  $r$  ו- $s$  כך שלמטריצה

$$M = \begin{pmatrix} 1 & r & s \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

יהיה ערך עצמי שווה ל-1? הקשר הדרוש יוצא להיות  $3r + 17s = 0$ . כאשר  $r, s$  מקיימים יחס זה, איך היית מוצא בסיס למרחב העמודות של המטריצה  $M - I$ ?

1. (א) איך ניתן לחשב את השטח מתחת לעקומה  $y = 4 \sin x$  אבל מעל לעקומות  $y = \frac{1}{3}x^2$  ו- $y = \frac{2}{1+x}$  על הקטע  $0 \leq x \leq \pi$ ? (ראה באיור).



(ב) ביותר כלליות, איך ניתן לחשב את השטח מתחת לעקומה  $y = 4 \sin x$  אבל מעל לעקומות  $y = f(x)$  ו- $y = g(x)$  על הקטע  $0 \leq x \leq \pi$ ? אם החלטת לעבוד ב- Maple יש להניח שקבלת פרוצדורות המחשבות את  $f$  ואת  $g$ . אם החלטת לעבוד ב- Matlab יש להניח שקבלת קובצי-M המחשבים את  $f$  ואת  $g$ . אבל יש להמנע מהנחות על צורות הפונקציות  $f$  ו- $g$ .

2. (א) יהיו  $X, Y$  שני ווקטורים מאותו מימד, ו- $r, s$  שני שלמים עם  $1 \leq r < s \leq \dim(X)$ . סמן על ידי  $Y'$  את הווקטור שמקבלים על ידי החלפת רכיבים  $r$  ו- $s$  של  $Y$ . כתוב פונקציה ב-Matlab אשר מקבלת את  $X, Y, r, s$  כקלט, ומחזירה:  
את  $Y$  אם  $\text{norm}(X - Y) \leq \text{norm}(X - Y')$   
ואת  $Y'$  אם  $\text{norm}(X - Y') < \text{norm}(X - Y)$ .

(ב) בהנתן שני ווקטורים  $X, Y$  מאותו מימד, רוצים לשנות את סדר הרכיבים של  $Y$  כך ש- $\text{norm}(X - Y)$  יהיה כמה שאפשר יותר קטן. העזר בפונקציה שכתבת בסעיף (א) כדי להחליף זוגות של רכיבים של  $Y$  עד שאי אפשר עוד להקטין את  $\text{norm}(X - Y)$  על ידי פעולה זו.

3. בהנתן ווקטור  $A = (a_1, a_2, a_3)$  ומספר  $b$  ניתן לבנות מישור  $a_1x + a_2y + a_3z = b$  שנסמן  $M$ . המרחק  $d$  מהנקודה  $P = (p_1, p_2, p_3)$  למישור  $M$  נתון על ידי

$$d = \frac{|A \cdot P - b|}{\sqrt{A \cdot A}}.$$

כתוב פרוצדורה ב- Maple אשר מקבלת כקלט את הווקטור  $A$ , את המספר  $b$ , וגם רשימה של נקודות  $[P_1, P_2, \dots, P_n]$ , ומחשבת

(א) את המרחק המקסימלי ואת המרחק המינימלי מאחת הנקודות למישור  $M$ .

(ב) את המרחק הממוצע מהנקודות למישור  $M$ .

4. אם

$$M(s, t) = \begin{pmatrix} 2 & s & t \\ s & -1 & 4 \\ t & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

ו-  $\lambda(s, t)$  מסמן את הערך העצמי של  $M(s, t)$  שהוא הכי קרוב ל-1, איך היית מחשב את

$$\int \int_D (\lambda(s, t) - 1)^2 ds dt$$

כאשר  $D$  מסמן את מעגל היחידה

$$D = \{(s, t) | s^2 + t^2 \leq 1\} ?$$