בס"ד
<u>שימושי מחשב במתמטיקה 88-151, פרופ' ג'. שיף</u>
<u>מועד ב', סמסטר ב', תשס"ו</u>

זמן המבחן: שעתיים.
מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס.
בחלק א' (50% של הציון) יש לענות על כל השאלות (ניקוד כל השאלות בחלק שווה)
בחלק ב' (50% של הציון) יש לענות על 2 מהשאלות (ניקוד כל השאלות בחלק שווה)

חלק א'

1. אם ב- Matlab A היא מטריצה מגודל 3×3, ו- b הוא ווקטור שורה ממימד 3, הסבר מה תהיינה התוצאות של הפקודות הבאות:

   (א) $A\backslash b$

   (ב) b/A

   (ג) A/b

2. אם

$$M(t)=\begin{pmatrix} t & \sin t & 1\\ \sin t & t^2 & \cos 2t\\ 1 & \cos 2t & t^3\end{pmatrix}$$

   איך היית משתמש ב- Maple למצוא את

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{Trace}(M^TM)\ dt \quad ?$$

3. המספרים $a_1,a_2,a_3,\ldots$ הם מוגדרים על ידי $a_1=1$ ו-

$$a_n=\sum_{i=1}^{n-1}a_ia_{n-i}\ ,\qquad n>1$$

   כתוב פקודות ב- Matlab לייצר את המספרים $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_{100}$, ולצייר גרף של $\frac{n^{3/2}a_n}{4^n}$ כפונקציה של n עבור n בין 1 ל-100.

4. איך היית מוצא, ב- Matlab, את האנטגרל

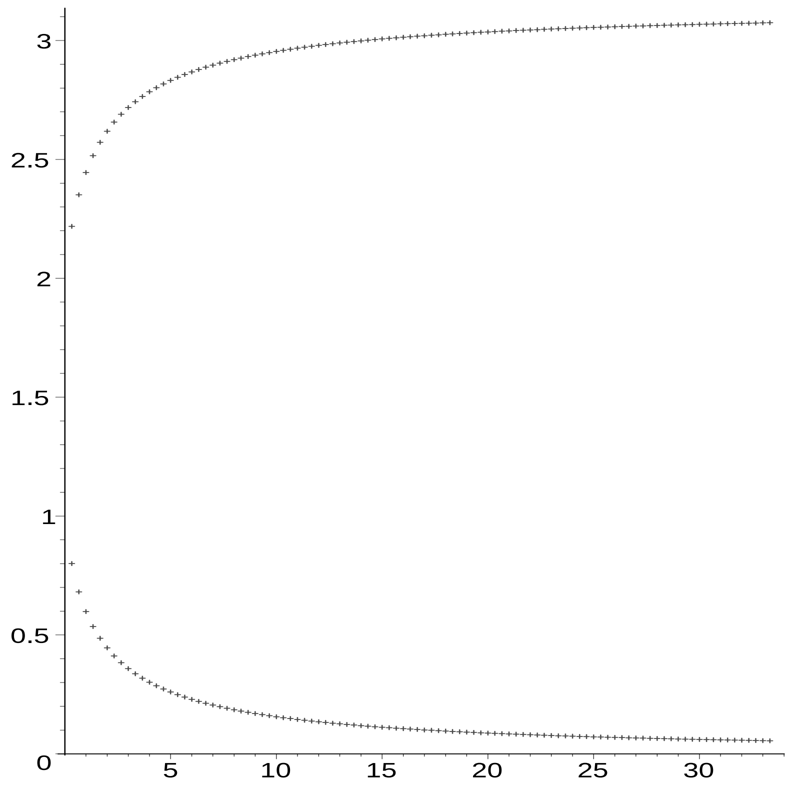
$$\int\int_D\frac{\sin(2xy)}{1+x^2+y^2}\ dxdy$$

   כאשר התחום D הוא רבע העיגול $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\ ,\ x>0\ ,\ y>0\}$?

5. הפקודות הבאות ב- Maple:

```
with(plots) :
b[0] := 1 :
for i from 1 to 100 do
  b[i] := fsolve(x^2 - 3 * x + 2 - (i/3) * sin(x) = 0, x = b[i - 1])
end do :
c[0] := 2 :
for i from 1 to 100 do
  c[i] := fsolve(x^2 - 3 * x + 2 - (i/3) * sin(x) = 0, x = c[i - 1])
end do :
p1 := plot([seq([i/3, b[i]], i = 1..100)], style = point) :
p2 := plot([seq([i/3, c[i]], i = 1..100)], style = point) :
display(p1, p2);
```

מייצרות את הגרף הבא:



הסבר בקצרה את החישוב שנעשה בפקודות אלה, ואת מה שרואים בגרף. (אין צורך להסביר כל פקודה בנפרד, רק את המטרה הכללית של החישוב.)

חלק ב

1. כתוב פרוצדורה ב- Maple אשר מקבלת כקלט 4 ווקטורים דו-מימדיים a_0, a_1, b_0, b_1 ומבצעת את הפעולות הבאות:

(א) מחשבת את הפונקציה (הווקטורית)

$$x(t) = a_0(1-t)^3 + 3a_1 t(1-t)^2 + 3b_1 t^2(1-t) + b_0 t^3$$

ומציירת גרף של $x_2(t)$ מול $x_1(t)$ עבור t בקטע $0 \le t \le 1$. (כאן $x_i(t)$ מסמן רכיב i של $x(t)$.)

(ב) מחשבת את הפונקציה

$$\kappa(t) = \frac{|x_1''(t)x_2'(t) - x_2''(t)x_1'(t)|}{(x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2)^{3/2}}$$

ומציירת גרף של $\kappa(t)$ מול t עבור t בקטע $0 \le t \le 1$.

(ג) מוצאת את כל הערכים של t שבהם $\kappa(t) = 0$ בקטע $0 \le t \le 1$.

2. לכל ווקטור v בעל מימיד n, ולכל מספר ממשי α, מגדירים את הווקטורים החדשים $s_\alpha(v)$ ו- $d_\alpha(v)$ כדלהלן:

$$\begin{aligned}
(s_\alpha(v))_i &= \begin{cases} v_1 & i = 1 \\ \alpha v_{i-1} + (1-2\alpha)v_i + \alpha v_{i+1} & 2 \le i \le n-1 \\ v_n & i = n \end{cases} \\
(d_\alpha(v))_i &= \begin{cases} v_2 - v_1 & i = 1 \\ (\alpha - \frac{1}{2})v_{i-1} - 2\alpha v_i + (\alpha + \frac{1}{2})v_{i+1} & 2 \le i \le n-1 \\ v_n - v_{n-1} & i = n \end{cases}
\end{aligned}$$

כאן v_i מסמן רכיב i של v.

(א) כתוב פונקציה ב- Matlab אשר מקבלת כקלט ווקטור v ומוצאת את הערך של α כך ש $||s_\alpha(v)||^2 = s_\alpha(v) \cdot s_\alpha(v)$ הוא מינימלי. בנוסף להחזיר את הערך הרצוי של α, יש לפונקציה לצייר גרף שממנו ניתן להשוות בין v ו- $s_\alpha(v)$.

(ב) פתור את סעיף (א) שוב, אבל הפעם דרך פרוצדורה ב- Maple.

(ג) כתוב עוד פונקציה ב- Matlab אשר מקבלת כקלט ווקטור v ומוצאת את הערכים של α, β, γ כך ש $||s_\gamma(d_\beta(s_\alpha(v)))||^2$ הוא מינימלי.

3. בהנתן 3 נקודות במישור (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3), (שאינם על קו ישר), ניתן למצוא מעגל

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

העובר דרך 3 הנקודות כדלהלן: פותרים את מערכת המשוואות

$$\begin{pmatrix} 2x_1 & 2y_1 & 1 \\ 2x_2 & 2y_2 & 1 \\ 2x_3 & 2y_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2+y_1^2 \\ x_2^2+y_2^2 \\ x_3^2+y_3^2 \end{pmatrix}$$

כדי למצוא את a ואת b, וגם גודל נוסף c, ואז מוצאים את r^2 על ידי

$$r^2=c+a^2+b^2\ .$$

(א) כתוב פרוצדורה ב- Maple אשר מקבלת כקלט 3 נקודות במישור, ומחזירה כפלט את המשוואה של המעגל העובר דרך 3 הנקודות.

(ב) העזר בפרוצדורה שכתבת בסעיף (א) לכתוב פרוצדורה אחרת הבודקת האם 4 נקודות נתונות במישור הן על מעגל אחד. יש לחשוב גם על המקרה שהנקודות ניתנו באופן מדוייק, וגם על המקרה שהן ניתנו באופן נומרי (כלומר עם שגיאת עיגול).

4. אם

$$M(s,t)=\begin{pmatrix} s & 2 & t & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 3 \\ t & 4 & s & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

והערכים העצמיים של $M(s,t)$ הם, לפי סדר עולה, $\lambda_1(s,t),\lambda_2(s,t),\lambda_3(s,t),\lambda_4(s,t)$, איך היית מוצא, ב- Matlab, את הערך המינימלי של

$$f(s,t)=(\lambda_1(s,t)+4)^2+(\lambda_2(s,t)+2)^2+(\lambda_3(s,t)-2)^2+(\lambda_4(s,t)-4)^2\ ?$$

אם $p(s,t,\lambda)$ מסמן את הפולינום המאפיין של $M(s,t)$, איך היית מוצא, ב- Matlab, את הערך המינימלי של

$$g(s,t)=p(s,t,-4)^2+p(s,t,-2)^2+p(s,t,2)^2+p(s,t,4)^2\ ?$$