

זמן המבחן: שעתיים.

מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס.

בחלק א' (50% של הציון) יש לענות על כל השאלות (ניקוד כל השאלות בחלק שווה).

בחלק ב' (50% של הציון) יש לענות על 2 מהשאלות (ניקוד כל השאלות בחלק שווה).

יש לנמק היטב כל תשובה.

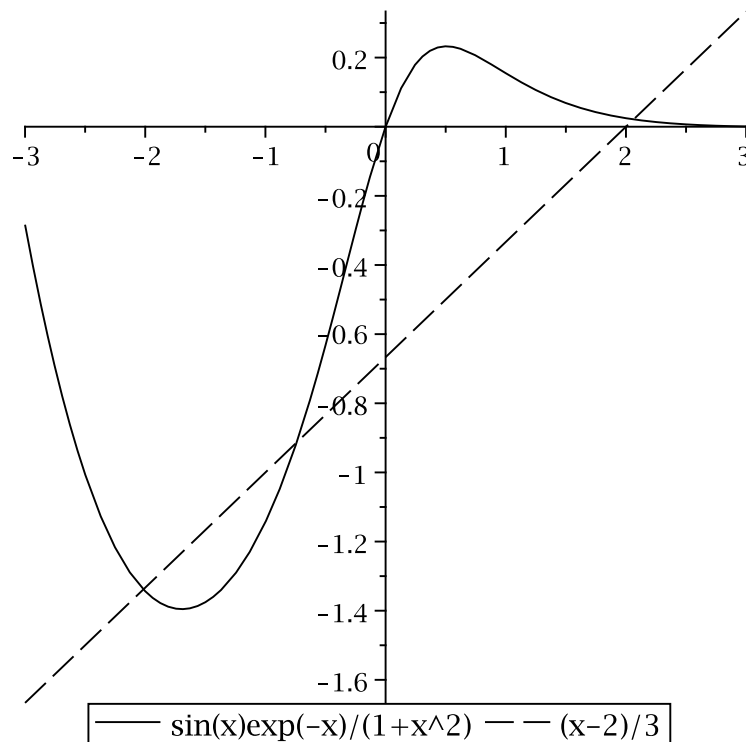
חלק א'

1. כתוב פונקציה ב- Matlab אשר מחשבת את הערכים של x, y שבהם הפונקציה

$$f_p(x, y) = \frac{\sin^2(x + 2y + p)}{1 + x^2 + 2y^2}$$

היא מקסימלית. (הפונקציה תקבל ערך של p כקלט). איך היית משתמש בפונקציה זו לצייר גרף תלת-מימדי של העקומה $(p, x(p), y(p))$?

2. באיור למטה רואים את שתי העקומות $y = \frac{e^{-x} \sin x}{1+x^2}$ ו- $y = \frac{1}{3}(x - 2)$. איך היית משתמש ב- Maple כדי למצוא את שני השטחים החסומים בין שתי העקומות ?



3. איך היית משתמש ב- Matlab כדי לחשב את האנטגרל הכפול

$$\iint_D \cos\left(\frac{x-2}{y+2} + \frac{y-2}{x+2}\right) dx dy$$

כאשר D הוא התחום בתוך העיגול $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 4$ שבו $y > x$?

4. איך היית מוצא, ב- Maple, את הערכים העצמיים של המטריצה

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad ?$$

יש למטריצה הזאת שני ערכים עצמיים 4, 2. איך היית מוצא את החיתוך שך מרחב השורות של $M - 2I$ ומרחב השורות של $M - 4I$? (שים לב ש- $\det(M - 2I) = \det(M - 4I) = 0$).

5. איך היית משתמש ב- Maple למצוא את הערך של b כך שהפונקציה

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + b \frac{\sin x}{4+x}$$

מקיימת $f'(\pi) = f'(-\pi)$? כאשר b מקבל ערך זה, איך היית מצייר את הגרף של הפונקציה על הקטע $[-3\pi, 3\pi]$ המוגדרת על ידי

$$g(x) = \begin{cases} f(x + 2\pi) & -3\pi \leq x \leq -\pi \\ f(x) & -\pi \leq x \leq \pi \\ f(x - 2\pi) & \pi \leq x \leq 3\pi \end{cases} \quad ?$$

(יש לשים לב ש- $f(\pi) = f(-\pi)$).

חלק ב'

1. (א) למעגל I יש מרכז (a_1, b_1) ורדיוס r_1 , ולמעגל II יש מרכז (a_2, b_2) ורדיוס r_2 . כתוב פונקציה ב- Matlab אשר מקבלת כקלט את המטריצה

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & r_1 \\ a_2 & b_2 & r_2 \end{pmatrix}$$

ומחזירה כפלט:

- 1 אם מעגל II הוא בתוך מעגל I (בתוך ממש, לא משיק)
- 2 אם מעגל I הוא בתוך מעגל II (בתוך ממש, לא משיק)
- 3 אם המעגלים משיקים זה לזה
- 4 אם המעגלים חותכים זה את זה (חותכים ממש, לא משיקים)
- 5 אחרת, המעגלים אינם אחד בתוך השני, ולא נוגעים זה בזה.

(ב) המטריצה

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & r_1 \\ a_2 & b_2 & r_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

מסמנת אוסף של מעגלים. כתוב פונקציה ב- Matlab אשר מוצאת איזה מהמעגלים חותכים (חותכים ממש) כמה שאפשר יותר מהמעגלים האחרים. (לדוגמה, אם יש 7 מעגלים, ש-3 מהם חותכים 4 מעגלים אחרים, ואין אף מעגל החותך 5 מעגלים אחרים, יש למצוא את 3 המעגלים האלה. אין צורך לדאוג לאלגוריתם הכי יעיל).

2. (א) כתוב פרוצדורה ב- Maple אשר מקבלת כקלט מספר ממשי אי-רציונלי x ושלים חיובי n ומחזירה את המספר הרציונלי מהצורה $\frac{m}{n}$ שהוא הכי קרוב ל- x .

(ב) אומרים שמספר הרציונלי $\frac{m}{n}$, $n > 0$, $m, n \in \mathbb{Z}$, הוא "קירוב רציונלי טוב" למספר אי-רציונלי x אם לא קיים מספר רציונלי עם מכנה פחות מ- n שהוא יותר קרוב ל- x מ- $\frac{m}{n}$. כתוב פרוצדורה ב- Maple אשר מקבלת כקלט מספר ממשי אי רציונלי x ושלים חיובי D , ומחזירה את כל הקירובים הרציונליים הטובים ל- x עם מכנה לא גדול מ- D .

(ג) כאשר אני כתבתי פרוצדורה כזאת, וניסיתי למצוא קירובים רציונליים טובים ל- π , עם מכנה עד 100000, הפרוצדורה הצליחה למצוא את הקירוב $\frac{104348}{33215} \approx 3.14159265392142$. אבל לא את הקירוב $\frac{208341}{66317} \approx 3.14159265346744$. מה היית מציע כדי לפתור את הבעיה הזאת? ($\pi \approx 3.14159265358979$)

3. (א) למשוואה

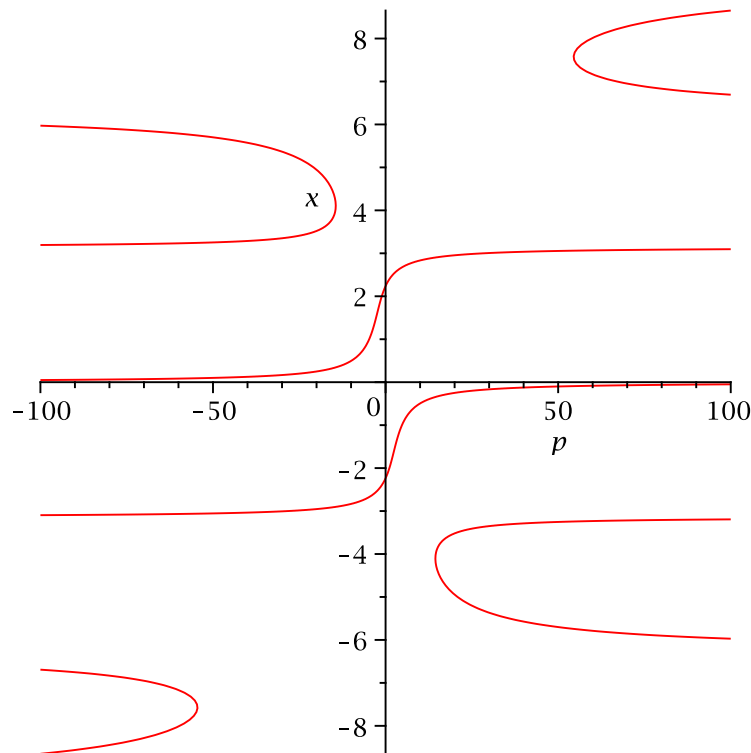
$$x^2 = 5 + p \sin x$$

יש שני פתרונות (x -ל) כאשר $p = 0$, והפתרונות האלה משתנים באופן רציף כאשר p משתנה. איזה פקודות היית כותב ב- Matlab כדי לצייר גרף של הפתרונות האלה כפונקציות של p , כאשר p משתנה מ-10- עד 10?

(ב) התוצאה של הפקודה

`implicitplot(x^2=5+p*sin(x),p=-100..100,x=-10..10,numpoints=50000)`

ב- Maple היא הגרף



כתוב או פרוצדורה ב- Maple או פונקצייה ב- Matlab אשר מקבלת כקלט ערך של p , ומחזירה כפלט כמה שאפשר יותר פתרונות של המשוואה $x^2 = 5 + p \sin x$.