

זמן המבחן: שעתיים.

מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס.

בחלק א' (50% של הציון) יש לענות על כל השאלות (ניקוד כל השאלות בחלק שווה).

בחלק ב' (50% של הציון) יש לענות על 2 מהשאלות (ניקוד כל השאלות בחלק שווה).
 יש לנמק היטב כל תשובה.

חלק א'

1. איך משתמשים ב- Maple למצוא את השורשים, את האסימפטוטות ואת הנקודות הקריטיות של הפונקציה

$$? f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 - 25x + 28}{x^3 - 3x^2 + 4x - 12}$$

(רוצים תשובות אנליטיות, אם אפשר).

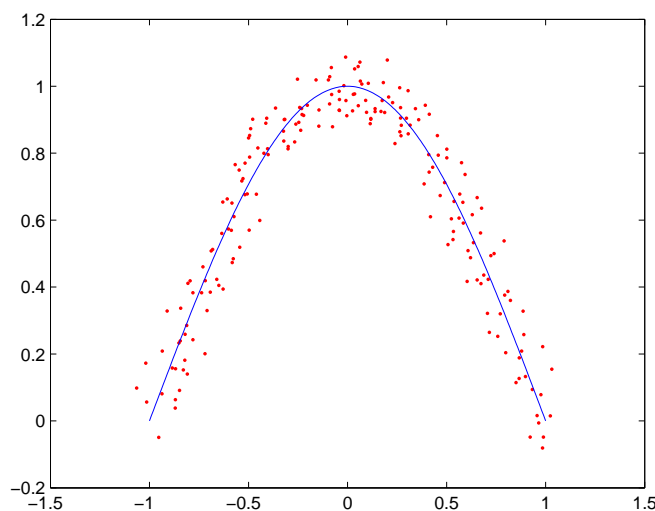
2. כתוב/י פונקציה ב- Matlab אשר מקבלת כקלט מספר סקלרי x ומחזירה כפלט את הערכים העצמיים ואת הווקטורים העצמיים של המטריצה

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & 2 & -2 \\ x & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

3. הסברי/י למה הפקודות הבאות:

```
x=[-1:0.01:1];
A=[x;cos(pi*x/2)];
A=A+0.2*rand(size(A))-0.1;
plot(A(1,:),A(2:,:), 'r.', x, cos(pi*x/2), 'b')
```

נותנות את הגרף הבא:



4. כתוב/י פרוצדורה Maple אשר מקבלת כקלט מספר סקלרי p ומחזירה כפלט את הערך של האנטגרל

$$I(p) = \int_0^p \frac{x dx}{e^x - 1}$$

איך היית מצייר/ת ב- Maple את הגרף של $I(p)$ עבור p בין 0 ל-10?

5. איך היית משתמש/ת ב- Matlab למצוא גרף של הערך המינימלי של הפונקציה

$$f_t(x) = \exp\left(-\frac{\sin x}{1+x+tx^2}\right)$$

עבור t בין 1 ל-5? (הכוונה - לכל t ניתן למצוא ערך מינימלי של $f_t(x)$, רוצים גרף של הערך המינימלי כפונקציה של t .)

חלק ב'

1. (א) אומרים ששתי נקודות $[x_1, y_1]$, $[x_2, y_2]$ הן באותו צד של הישר $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ אם ורק אם

$$(\alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma)(\alpha x_2 + \beta y_2 + \gamma) > 0$$

כתוב/י פרוצדורה ב- Maple אשר מקבלת כקלט שתי נקודות $[x_1, y_1]$, $[x_2, y_2]$ ורשימה של מקדמים $[\alpha, \beta, \gamma]$ ובודקת האם שתי הנקודות הן באותו צד של הישר $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ או לא.

(ב) כתוב/י פרוצדורה ב- Maple אשר מקבלת כקלט נקודה $[x, y]$ ורשימה של שלוש נקודות $[[x_1, y_1], [x_2, y_2], [x_3, y_3]]$ ובודקת האם הנקודה $[x, y]$ נמצאת בתוך המשולש עם קודקודים $[x_1, y_1]$, $[x_2, y_2]$, $[x_3, y_3]$ או לא.

רמז: ניתן לבדוק שנקודה היא בתוך משולש על ידי שבודקים שלכל קודקוד, הנקודה והקודקוד הם באותו צד של הישר המחבר בין שני הקודקודים האחרים.

2. השאלה הזאת מתייחסת לפונקציה

$$f(x) = a(x)e^{b(x)}$$

כאשר

$$a(x) = a(1)x^{n-1} + a(2)x^{n-2} + \dots + a(n), \quad b(x) = b(1)x^{m-1} + b(2)x^{m-2} + \dots + b(m)$$

ו- a, b הם שני ווקטורים נתונים ב- Matlab.

(א) כתוב/י פונקציה ב- Matlab אשר מקבלת כקלט את הווקטור a ומחזירה את השורשים הממשיים הגדול ביותר והקטן ביותר של הפולינום $a(x)$. לשורשים האלה נקרא x_{\min} ו- x_{\max} . במקרה ואין שורשים ממשיים יש להגדיר $x_{\min} = x_{\max} = 0$.

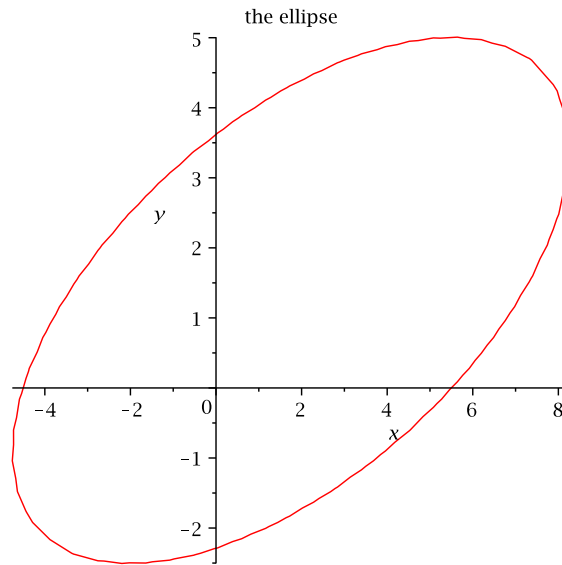
(ב) כתוב/י פונקציה ב- Matlab אשר מקבלת כקלט את הווקטור b ואת x_{\min}, x_{\max} ומוצאת את התת-קטעים של הקטע $x_{\min} - 1 \leq x \leq x_{\max} + 1$ (אם יש) שבהם $b(x) \geq 4$.

(ג) רוצים לצייר גרף של הפונקצייה f בקטע $x_{\min} - 1 \leq x \leq x_{\max} + 1$ אבל רק בתת-קטעים שבהם $b < 4$. איך היית משתמש/ת בפונקציות של הסעיפים הקודמים להשיג מטרה זו?

3. רוצים למצוא את השטח הכי גדול של משולש עם קודקודים על האליפסה

$$x^2 + 3y^2 - 2xy - x - 4y = 25$$

(ראה איור).



(א) כתוב/י פונקציה ב-Matlab אשר מקבלת כקלט זווית θ ומוצאת את r כך שהנקודה $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ היא על האליפסה.

(ב) כתוב/י פונקציה אשר מקבלת כקלט שלוש זוויות $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, מוצאת שלוש נקודות על האליפסה כמו בסעיף הקודם, ומחזירה כפלט את השטח של המשולש עם קודקודים אלה.

(ג) איך היית מוצאת את השטח המקסימלי ?

4. (א) אם

$$M = \begin{pmatrix} s & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

אזי לפי Maple מרחב העמדות של M פרוס על ידי הווקטורים

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

האם זה נכון לכל בחירה של s ?

רמז: שים/י לב שהדטרמיננט של M שווה 0 ללא תלות על s .

(ב) נתונה, ב-Matlab, מטריצה 4×4 עם תלות על שני פרמטרים, s, t . איך היית משתמש/ת ב-Matlab למצוא לאיזה בחירות של הפרמטרים s, t יש ערך עצמי כפול שווה ל-0 ? ולאיזה בחירות של s, t מרחב העמודות של המטריצה הוא ממימד 2 ?