

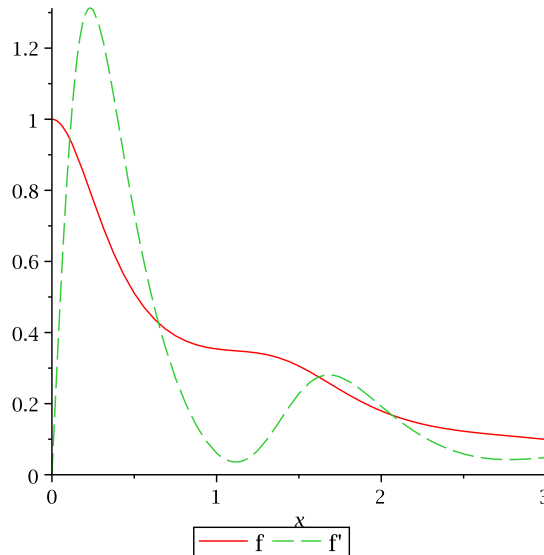
זמן המבחן: שעותיים.
מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס.
בחלק א' (50% של הציון) יש לענות על כל השאלות (ניקוד כל השאלות בחלק שווה).
בחלק ב' (50% של הציון) יש לענות על 2 מהשאלות (ניקוד כל השאלות בחלק שווה).
יש לנמק היטב כל תשובה.

חלק א'

1. באיור למטה מופיעים הגרפים של $f(x)$ ו- $-f'(x)$ כאשר $f(x) = \frac{1}{1+x^2+\sin^2(2x)}$. איזה פקודות צריך לכתוב ב- Maple כדי למצוא

- (א) ארבעה ערכים של x שבהם $f(x) + f'(x) = 0$?
(ב) את הערך של x שבו $f(x) = \int_0^x f(t)dt$?

יש לעבוד ל- 10 ספרות דיוק.



2. איך פותרים את סעיף ב בשאלה 1 בעזרת Matlab ?

3. איך מוצאים בעזרת Matlab את האנטגרל הכפול

$$\int \int_D \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy$$

כאשר D הוא המשולש החסום על ידי 3 הישרים $x = 1$, $x - y + 1 = 0$, $x + y + 1 = 0$?

4. כתוב/י פונקציה ב- Matlab אשר מקבלת כקלט ערך של p (סקלר) ומחזירה את הערכים של x, y, z שעושים את הפונקציה

$$f(x, y, z) = \frac{\sin(x+z) + \sin(y+z) + p \sin(x-y)}{1+x^2+y^2+z^2}$$

להיות מקסימלי.

5. ב- Maple הגדרתי מטריצה M מגודל 3×3 וכאשר כתבתי $a := \text{Eigenvectors}(M)$ קבלתי

$$a := \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/2 & 3 & 1/2 \\ -1/2 & -8 & -6 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

אז בטעות מחקתי את M . איך ניתן לבנות את M מ- a ?

חלק ב'

1. (א) כתוב/י פונקציה ב- Matlab אשר מקבלת כקלט מטריצה ממשית 3×3 ששורותיה הן הקואורדינטות של שלוש נקודות P_1, P_2, P_3 , ומחזירה כפלט את

$$\sqrt{(r_{12} - r_{23})^2 + (r_{23} - r_{31})^2 + (r_{31} - r_{12})^2}$$

כאן r_{12} הוא המרחק בין P_1 ו- P_2 , r_{23} הוא המרחק בין P_2 ו- P_3 , ו- r_{31} הוא המרחק בין P_3 ו- P_1 .

(ב) כתוב/י פונקציה ב- Matlab אשר מקבלת כקלט מטריצה ממשית $n \times 3$ ששורותיה הן הקואורדינטות של n נקודות $P_1, P_2, \dots, P_n$, ומחפשת ביניהן את כל שלישיות של נקודות שהן הקודקודים של משולשים שווה צלעות. שים לב שהפונקציה של סעיף א מתאפסת אם ורק אם שלישית הנקודות הן קודקודים של משולש שווה צלעות, אבל למטרת סעיף זה, יש לקחת בחשבון שאולי יש טעות נומרית קטנה בקואורדינטות של הנקודות שהתקבלו.

2. פולינום מדרגה n נקרא "מוני" אם הוא מהצורה

$$x^n + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-3}x^{n-3} + \dots + a_0$$

כלומר אם המקדם של x^n הוא 1 והמקדם של x^{n-1} הוא 0. נתונים ב- Matlab שני פולינומים מוניים בעלי אותה דרגה, $a(x), b(x)$, אולי עם מקדמים מרוכבים. (כרגיל ב- Matlab הפולינומים הם מיוצגים על ידי שני ווקטורים בעלי אורך $n+1$, a, b). כתוב/י פונקציה אשר מקבלת כקלט a, b ומספר ממשי x , ומחזיר את הערך של

$$\frac{|a(x) - b(x)|}{\sqrt{1 + |a(x)|^2 + |b(x)|^2}}$$

העזרי/י בפונקציה שכתבת כדי למצוא את

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|a(x) - b(x)|}{\sqrt{1 + |a(x)|^2 + |b(x)|^2}} dx$$

אזהרה: Matlab איננו מקבל Inf כגבול לחישוב אנטיגרל. יש לבחור גבולות סופיות מתאימות.

3. נתונות ב- Maple שתי פונקציות של משתנה אחד, בצורה של ביטויים $f(x)$, $g(x)$. רוצים למצוא את המרחק האנכי המינימלי בין הגרפים של שתי הפונקציות, כלומר את

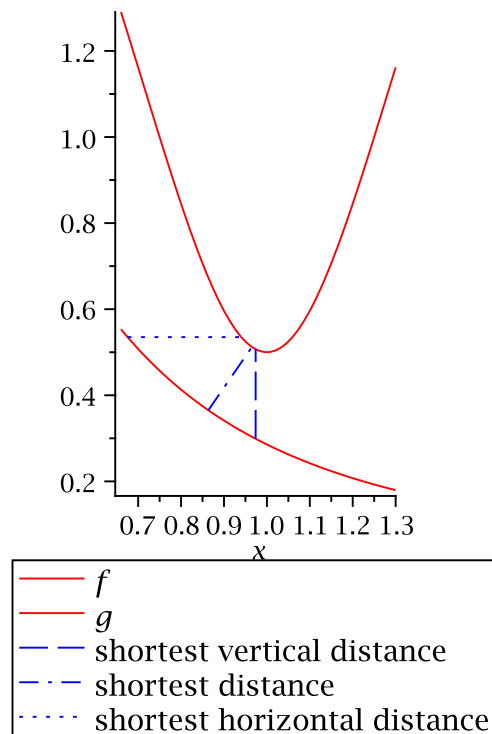
$$\min \{|f(x) - g(x)| \mid x \in \mathbf{R}\}$$

וגם את המרחק המינימלי בין הגרפים של שתי הפונקציות, כלומר את

$$\min \{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (f(x_1) - g(x_2))^2} \mid x_1, x_2 \in \mathbf{R}\}$$

כמו כן רוצים לצייר גרף המראה את המרחקים האלה, כמו באיור למטה. איך עושים את הדברים האלה ב- Maple ? מה לגבי המרחק האופקי המינימלי, כלומר

$$\min \{|x_1 - x_2| \mid x_1, x_2 \in \mathbf{R}, f(x_1) = g(x_2)\} ?$$



4. הפרוצדורה למטה מיועדת לקבל כקלט 2 ווקטורים תלת-מימדיים (נקודות במרחב), ולצייר או-קטהדרון עם קודקודים נגדיים בשתי הנקודות האלה. הסברי את האלגוריתם. האם יש פתרון יחיד לבעיה ? אחרי הפרוצדורה מופיעה התוצאה של הפקודה : `mksq(<1,4,2>,<-1,3,3>);`

```
with(plots): with(LinearAlgebra):
mksq:=proc(p1,p2)
  local v,c,r,e1,e2,circ,t,v1,v2,v3,v4,d1,d2,d3,d4,d5,d6,d7,d8,d9,d10,d11,d12,verts;
  v:=p2-p1; c:=(p1+p2)/2; r:=Norm(v,2)/2;
  if v[1]=0 and v[2]=0 then
    e1:=<1,0,0>; e2:=<0,1,0>;
  else
    e1:=<v[2],-v[1],0>; e2:=CrossProduct(v,e1);
    e1:=e1/Norm(e1,2); e2:=e2/Norm(e2,2);
  end if;
  circ:=c+r*cos(t)*e1+r*sin(t)*e2;
  v1:=subs(t=0,circ); v2:=subs(t=Pi/2,circ); v3:=subs(t=Pi,circ); v4:=subs(t=3*Pi/2,circ);
  d1:=spacecurve( [p1[1]+(v1[1]-p1[1])*t,p1[2]+(v1[2]-p1[2])*t,p1[3]+(v1[3]-p1[3])*t], t=0..1);
  d2:=spacecurve( [p1[1]+(v2[1]-p1[1])*t,p1[2]+(v2[2]-p1[2])*t,p1[3]+(v2[3]-p1[3])*t], t=0..1);
  d3:=spacecurve( [p1[1]+(v3[1]-p1[1])*t,p1[2]+(v3[2]-p1[2])*t,p1[3]+(v3[3]-p1[3])*t], t=0..1);
  d4:=spacecurve( [p1[1]+(v4[1]-p1[1])*t,p1[2]+(v4[2]-p1[2])*t,p1[3]+(v4[3]-p1[3])*t], t=0..1);
  d5:=spacecurve( [p2[1]+(v1[1]-p2[1])*t,p2[2]+(v1[2]-p2[2])*t,p2[3]+(v1[3]-p2[3])*t], t=0..1);
  d6:=spacecurve( [p2[1]+(v2[1]-p2[1])*t,p2[2]+(v2[2]-p2[2])*t,p2[3]+(v2[3]-p2[3])*t], t=0..1);
  d7:=spacecurve( [p2[1]+(v3[1]-p2[1])*t,p2[2]+(v3[2]-p2[2])*t,p2[3]+(v3[3]-p2[3])*t], t=0..1);
  d8:=spacecurve( [p2[1]+(v4[1]-p2[1])*t,p2[2]+(v4[2]-p2[2])*t,p2[3]+(v4[3]-p2[3])*t], t=0..1);
  d9:= spacecurve( [v2[1]+(v1[1]-v2[1])*t,v2[2]+(v1[2]-v2[2])*t,v2[3]+(v1[3]-v2[3])*t], t=0..1);
  d10:=spacecurve( [v3[1]+(v2[1]-v3[1])*t,v3[2]+(v2[2]-v3[2])*t,v3[3]+(v2[3]-v3[3])*t], t=0..1);
  d11:=spacecurve( [v4[1]+(v3[1]-v4[1])*t,v4[2]+(v3[2]-v4[2])*t,v4[3]+(v3[3]-v4[3])*t], t=0..1);
  d12:=spacecurve( [v1[1]+(v4[1]-v1[1])*t,v1[2]+(v4[2]-v1[2])*t,v1[3]+(v4[3]-v1[3])*t], t=0..1);
  verts:=pointplot3d( [p1,p2,v1,v2,v3,v4], symbol=circle);
  display(verts,d1,d2,d3,d4,d5,d6,d7,d8,d9,d10,d11,d12);
end proc;
mksq(<1,4,2>,<-1,3,3>);
```

