

זמן המבחן: שעתיים.
מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס.
בחלק א' (60% של הציון) יש לענות על כל השאלות. ניקוד כל השאלות בחלק שווה.
בחלק ב' (40% של הציון) יש לענות על 2 מתוך 3 השאלות. ניקוד כל השאלות בחלק שווה.
יש לנמק היטב כל תשובה.

חלק א'

1. איך היית מוצא את הערך המדויק של $\int_0^1 \text{Trace}(M^2) dx$ כאשר

$$M = \begin{pmatrix} 1 & e^x & x \\ e^x & 1 & x^2 \\ x & x^2 & 1 \end{pmatrix} \quad ?$$

2. כתוב פונקציה מטלב אשר מקבלת כקלט ווקטור (עמודה או שורה) ומחשב את הסכום של רכיבים של הווקטור שהם שלמים זוגיים.

3. כתוב פרוצדורה במייפל אשר מקבלת כקלט רשימה ומחשב את הסכום של רכיבים של הרשימה שהם שלמים זוגיים.

4. אם $f(x) = \frac{1}{2+x^2+\sin^4 x}$ איך היית משתמש במטלב למצוא את הפתרון של המשוואה

$$f(x) = \int_0^x f(y) dy \quad ?$$

(שים לב שעבור $x > 0$, $f(x)$ היא פונקציה חיובית יורדת.)

5. כתוב פונקציה מטלב אשר מקבלת כקלט מספר ממשי (קטן) t , מוצאת את נקודת המינימום של הפונקציה $x = X(t)$

$$f_t(x) = \sqrt{1+x^2} + \frac{t \sin x}{\sqrt{1+x^2}}$$

ומחזירה את

$$\kappa(t) = 1000 (f_t(X(t) + 0.01) - 2f_t(X(t)) + f_t(X(t) - 0.01))$$

6. אם $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$ מסמנים את שני הערכים העצמיים של המטריצה

$$M = \begin{pmatrix} t+2 & 1 \\ t & t^2 \end{pmatrix}$$

כתוב פקודות במייפל לצייר את הגרף של העקומה

$$\begin{cases} x(t) = \lambda_1(t) \\ y(t) = \lambda_2(t) \end{cases}$$

עבור $2 < t < 5$, ולחשב לעשרים ספרות דיוק את

$$\int_2^5 \sqrt{\left(\frac{d\lambda_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda_2}{dt}\right)^2} dt$$

1. מתמטיקאי רוצה לחקור את הערכים העצמיים של מטריצות סימטריות מגודל 20×20 עם רכיבים על האלכסון הראשי שהם מספרים אקראיים בטווח $[-5, 5]$ ועם רכיבים לא-אלכסוניים שהם מספרים אקראיים בטווח $[-1, 1]$.

(א) כתוב פונקציית מטלב לייצר את הערכים העצמיים של מטריצה כזו.

(ב) כתוב פקודות מטלב לייצר ערכים עצמיים של 1000 מטריצות כזו, ולספור בכמה מ-1000 המקרים יש ערך עצמי עם ערך מוחלט גדול מ-5.

(ג) כתוב פקודות מטלב לייצר ערכים עצמיים של 1000 מטריצות כזו, ולספור כמה מ-20,000 הערכים העצמיים נמצאים בכל אחד מהטווחים $[9.9, 10]$, $\dots$, $[-9.9, -9.8]$, $[-10, -9.9]$.

2. הראשית $(0, 0)$ נמצאת בתוך המשולש עם קודקודים $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$, $P_3 = (x_3, y_3)$ אם ורק אם קיימים 3 התנאים

$$\begin{aligned} \frac{P_1 \cdot P_3}{P_1 \cdot P_1} + \frac{P_2 \cdot P_3}{P_2 \cdot P_2} &< 0 \\ \frac{P_2 \cdot P_1}{P_2 \cdot P_2} + \frac{P_3 \cdot P_1}{P_3 \cdot P_3} &< 0 \\ \frac{P_3 \cdot P_2}{P_3 \cdot P_3} + \frac{P_1 \cdot P_2}{P_1 \cdot P_1} &< 0 \end{aligned}$$

(א) כתוב פונקציית מטלב אשר מקבלת כקלט את המטריצה

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$$

ומחזירה 1 אם הראשית נמצאת תוך המשולש ו-0 אחרת.

(ב) כתוב פונקציית מטלב אשר מקבלת כקלט את המטריצה

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{pmatrix}$$

ומחזירה

- 1 אם הנקודה (x_1, y_1) נמצאת בתוך המשולש עם קודקודים (x_2, y_2) , (x_3, y_3) , (x_4, y_4) .
- 2 אם הנקודה (x_2, y_2) נמצאת בתוך המשולש עם קודקודים (x_1, y_1) , (x_3, y_3) , (x_4, y_4) .
- 3 אם הנקודה (x_3, y_3) נמצאת בתוך המשולש עם קודקודים (x_2, y_2) , (x_1, y_1) , (x_4, y_4) .
- 4 אם הנקודה (x_4, y_4) נמצאת בתוך המשולש עם קודקודים (x_2, y_2) , (x_3, y_3) , (x_1, y_1) .
- 0 אחרת.

רמז: לכל בדיקה יש להשתמש בראשית מתאימה.

(ג) כתוב פונקציית מטלב אשר מקבלת כקלט משולש

$$T = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \end{pmatrix}$$

ורשימת נקודות

$$S = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_n \end{pmatrix}$$

ומחשבת כמה נקודות של S נמצאות בתוך המשולש T .

3. למטה מופיעות הפקודות שבצעתי לפתור את המשוואה

$$\cos 3x + 8 \sin 3x + 4 \sin 2x + \cos x + 7 \sin x = 0$$

(עבור x בקטע $[-\pi, \pi]$) וגם גרף של הפונקציה מצד שמאל שציירתי לאמת את התוצאות. הסבר את הפקודות ואת התהליך המתמטי שאני משתמש בו. (שים לב: יש אולי פקודות שלא ראינו או שראינו פחות במשך הקורס, אבל מתוך ההקשר ניתן להסיק את מה שהם עושים). האם ניתן להתשמש בשיטה זו עבור משוואות טריגונומטריות אחרות? מה אולי צריך לשנות?

בהצלחה!

```
> {p := cos(3·x) + 8·sin(3·x) + 4·sin(2·x) + cos(x) + 7·sin(x)
    p := cos(3 x) + 8 sin(3 x) + 4 sin(2 x) + cos(x) + 7 sin(x)} (1)
> p2 := simplify(expand(p))
    p2 := 4 cos(x)3 - 2 cos(x) + 32 sin(x) cos(x)2 - sin(x) + 8 sin(x) cos(x) (2)
> p3 := subs(sin(x) = s, cos(x) = c, p2)
    p3 := 4 c3 - 2 c + 32 s c2 - s + 8 s c (3)
> mysin := solve(p3 = 0, s)
    mysin := - 2 c (2 c2 - 1) / (32 c2 - 1 + 8 c) (4)
> myeq := simplify(1 - c2 - mysin2)
    myeq := - 1040 c4 - 528 c3 - 1 + 16 c + 1040 c6 + 512 c5 + 5 c2 / (32 c2 - 1 + 8 c)2 (5)
> numer(myeq)
    1040 c4 + 528 c3 + 1 - 16 c - 1040 c6 - 512 c5 - 5 c2 (6)
> cs := [fsolve(numer(myeq) = 0, c)]
    cs := [-0.9962842779, -0.3802247078, -0.3003437886, 0.07978347358, 0.1060665800, 0.9986950283] (7)
> ss := [0$6]; for i from 1 to nops(cs) do ss[i] := subs(c = cs[i], mysin) end do: ss
    ss := [0, 0, 0, 0, 0, 0]
    [0.08612570768, -0.9248941400, 0.9538310166, -0.9968122176, 0.9943590330, -0.05107093454] (8)
> xs := [0$6]; for i from 1 to nops(cs) do xs[i] := arctan(ss[i], cs[i]) end do: xs
    xs := [0, 0, 0, 0, 0, 0]
    [3.055360114, -1.960835567, 1.875849390, -1.490927968, 1.464529857, -0.05109316152] (9)
```

