

זמן המבחן: שעותיים.

מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס.

בחלק א' (60% של הציון) יש לענות על כל השאלות. ניקוד כל השאלות בחלק שווה.

בחלק ב' (40% של הציון) יש לענות על 2 מתוך 3 השאלות. ניקוד כל השאלות בחלק שווה.
יש לנמק היטב כל תשובה.חלק א'

1. מה הן התוצאות של הפקודות הבאות במטלב? (יש לכתוב את מה שהמחשב יחזיר)

 $N = \text{pi}/2 * [0 \ 1 ; 2 \ 0]$ $A = [\sin(N); \cos(N)]$ $B = [\sin(N) * (\cos(N) .* N), (\sin(N) * \cos(N)) .* N]$

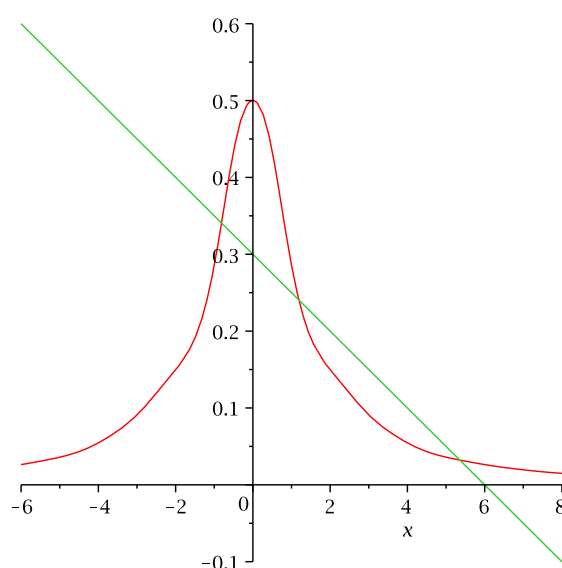
2. לפונקציה

$$f(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + p \cos x}{1 + p^2 x^2 + \frac{1}{4} x^4} dx$$

יש מקסימום ב- $p \approx 0.7$. איך היית משתמש במטלב למצוא את המקסימום ל-5 ספרות דיוק?

3. כתוב פקודות למצוא במטלב את האנטגרל הכפול

$$\int \int_D \log(x^2 + \cos^2 y) dx dy$$

כאשר D מסמן את מעגל היחידה, $x^2 + y^2 < 1$.4. למטה בגרף מופיעות הפונקציות $f(x) = \frac{1}{2+x^2+\sin^4 x}$, $g(x) = \frac{1}{20}(6-x)$. איך ניתן למצוא במיפל את השטחים של שני התחומים החסומים על ידי פונקציות אלה?

5. כתוב פרוצדורה במייפל אשר מקבלת כקלט שני מספרים חיוביים a, b ושלם חיובי n ומחשבת את

$$\frac{a(a+1)(a+2)\dots(a+n)}{b(b+1)(b+2)\dots(b+n)}$$

6. אם המטריצות A, B, C מוגדרות על ידי

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

איך היית מצייר, במייפל, את המשטח המוגדר על ידי

$$? \quad \begin{cases} x(s, t) = \det(A + sB + tC) \\ y(s, t) = \det(sA + B + tC) \\ z(s, t) = \det(sA + tB + C) \end{cases} \quad 0 < s < 1, 0 < t < 1$$

חלק ב'

1. (א) כתוב פרוצדורה במייפל אשר מקבלת כקלט את הרשימה

$$\begin{bmatrix} A & B & C & a & b & r \end{bmatrix}$$

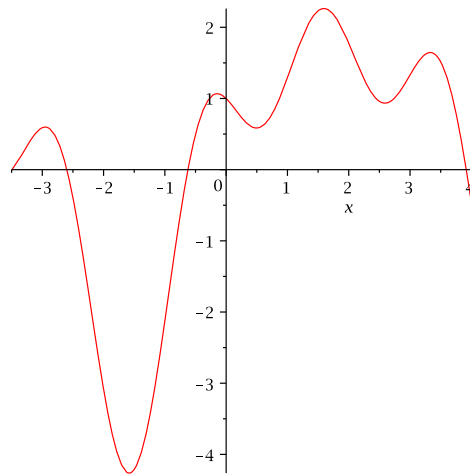
ומוצאת את כל הנקודות (x, y) אשר נמצאות גם על הישר $Ax + By + C = 0$ וגם על המעגל $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. (יש לכל היותר 2 נקודות).

(ב) כתוב פרוצדורה במייפל אשר מקבלת כקלט את הרשימה

$$\begin{bmatrix} A & B & C & a_1 & b_1 & r_1 & a_2 & b_2 & r_2 \end{bmatrix}$$

ומוצאת את "המרחק על הישר" $Ax + By + C = 0$ בין המעגל הראשון $(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = r_1^2$ ובין המעגל השני $(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 = r_2^2$. ה"מרחק" הזה הוא המרחק המינימלי בין נקודת חיתוך של הישר והמעגל הראשון ובין נקודת חיתוך של הישר והמעגל השני, בהנחה שקיימות נקודות כאלה.

2. אם לפונקציה הרציפה $f(x)$ יש מינימום מקומי ב- $x = x_0$, אומרים שה"עומק" של המינימום הוא ההפרש בגובה בין הפונקציה ב- x_0 ובין הפונקציה בנמוך ביותר של שני המקסימומים הסמוכים. ככה לפונקציה באיור למטה יש מינימום "עמוק" בערך ב- $x = -1.5$, ושני מינימומים רדודים יותר בערך ב- $x = 0.5, 2.5$.



ביותר פירוט, עם המקסימומים הסמוכים למינימום הם ב- x_1, x_2 עומק המינימום הוא

$$d(x_0) = \min(f(x_1) - f(x_0), f(x_2) - f(x_0))$$

אם יש רק מקסימום אחד סמוך, ב- x_1 , העומק הוא $f(x_1) - f(x_0)$. אם אין בכלל מקסימום סמוך, לדוגמה לפונקציה $f(x) = x^2$ ב- $x = 0$, אומרים שהעומק הוא ∞ . בהנתן פולינום p במטלב, כלומר ווקטור של מקדמים, כתוב פקודות:

(א) למצוא את ווקטור המקדמים של הנגזרת p' .

(ב) למצוא את כל נקודות המינימום ואת כל נקודות המקסימום.

(ג) למצוא את העומק של כל מינימום.

הערה: ניתן להסתמך על הפקודה `sort` לסדר ווקטור של מספרים ממשיים בסדר עולה.

3. (א) כתוב פונקציה במטלב אשר מקבלת כקלט מטריצה A , ומחשבת את הסכום

$$\sum \lambda_i \lambda_j \cos^2 \theta_{ij}$$

כאן $\{\lambda_i\}$ הם הערכים העצמיים הממשיים של A ; θ_{ij} מסמן את הזווית בין הווקטור העצמי הקשור לע"ע λ_i ובין הווקטור העצמי הקשור לע"ע λ_j ; והסכום הוא על כל הזוגות של ערכים עצמיים ממשיים זרים (כלומר הסכום לא כולל $i = j$)

תזכורת: ניתן למצוא את הקוסינוס של זווית θ בין שני ווקטורים v, w מהנוסחה

$$v \cdot w = \|v\| \|w\| \cos \theta$$

(ב) כתוב פונקציה במטלב אשר מקבלת כקלט מטריצה A , ומוצאת את הזווית הכי קטנה ואת הזווית הכי גדולה בין שני ווקטורים עצמיים ממשיים זרים. שים לב! אם v הוא ווקטור עצמי אזי גם $-v$ הוא ווקטור עצמי, ולכן הכוונה בשאלה זו היא תמיד למדוד את הזוויות בין ווקטורים עצמיים בטווח $[0, \frac{1}{2}\pi]$.

בהצלחה!