

זמן המבחן: שעתיים.  
מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס.  
בחלק א' (50% של הציון) יש לענות על כל השאלות. ניקוד כל השאלות בחלק שווה.  
בחלק ב' (50% של הציון) יש לענות על 2 מתוך 3 השאלות. ניקוד כל השאלות בחלק שווה.  
יש לנמק היטב כל תשובה.

חלק א'

1. כתוב פונקציה ב-Matlab אשר מקבלת כקלט את שלושת המספרים  $a, x_1, x_2$  ומחזירה כפלט את הערך של האנטגרל

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{e^{-2(x-x_1)^2}}{e^{-(x-x_1)^2} + ae^{-(x-x_2)^2}} dx$$

כאן  $\beta = \max(x_1, x_2) + 4$ ,  $\alpha = \min(x_1, x_2) - 4$ .

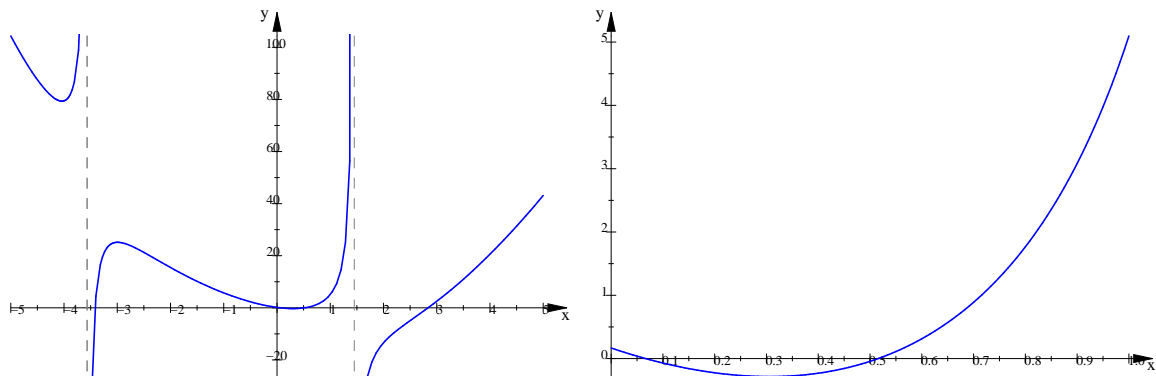
2. כתוב פונקציה ב-Matlab אשר מקבלת כקלט את שני המספרים  $\epsilon, N$ , כאשר  $N$  הוא שלם חיובי, ומחזירה כפלט את הערך של הסכום

$$\sum_{i=0}^N \epsilon \sin\left(\frac{1}{1 + \epsilon^2 i^2}\right)$$

3. למטה מופיעים גרפים של הפונקציה

$$f(x) = \frac{3x^4 - 30x^2 + 17x - 1}{x^2 + 2x - 6 + \sin x}$$

בקטעים  $x \in [-5, 5]$  (שמאל) ו- $x \in [0, 1]$  (ימין).



איך היית מוצא ב-Mupad את (קואורדינטות ה- $x$  וה- $y$  של) שלושת הנקודות הקריטיות של  $f(x)$ ? יש לעבוד ל-20 ספרות דיוק.

4. כתוב את הפקודות שהיית משתמש בהן ב-Mupad למצוא את הקשר בין הפרמטרים  $r, s$  כך שלמטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & r & s \\ 2 & -3 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

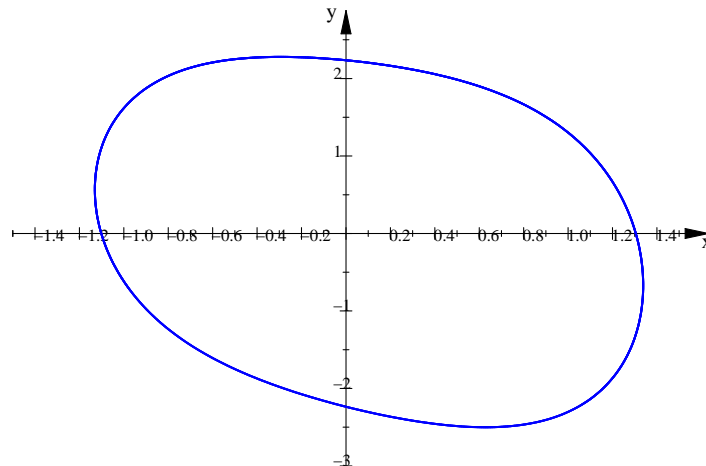
יש ערך עצמי 1. הקשר הדרוש הוא  $x = -8s$ . במקרה זה, איך היית מוצא את שאר הערכים העצמיים של המטריצה?

5. כתוב פונקציה ב-Matlab אשר מקבלת כקלט את הפרמטר  $s$  ומחזירה כפלט את האורך של ווקטור הפתרון  $x$  של מערכת

$$\begin{pmatrix} 1 & -8s & s \\ 2 & -3 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

## חלק ב'

1. רוצים למצוא את המשולש עם השטח הכי גדול עם קודקודים על העקומה  $x^4 + 2x^2 + y^2 + xy - x = 5$  המופיעה למטה.



כדי לעשות כן יש לכתוב פונקציות ב-Matlab לבצע את הפעולות הבאות:

(א) בהנתן המקדמים של פולינום שידועים מראש שיש לו רק שורש ממשי חיובי אחד, למצוא את השורש הזה.

(ב) בהנתן זווית  $\theta$ , למצוא מספר חיובי  $r$  כך שהנקודה  $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$  נמצאת על העקומה  $x^4 + 2x^2 + y^2 + xy - x = 5$ .

(ג) בהנתן שלוש זוויות  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ , למצוא שלוש נקודות  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$  על העקומה כמו בסעיף הקודם, ולחשב את השטח של המשולש עם קודקודים בשלוש נקודות אלה. (הפונקציה תקבל כקלט את שלושת הזוויות ותחזיר כפלט את השטח, אין צורך להחזיר כפלט את הנקודות).

(ד) למצוא את הזוויות שנותנות את המשולש, כמו בסעיף הקודם, עם השטח הכי גדול.

2. המרחק של נקודה  $P = (p_1, p_2)$  מהמעגל  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$  מוגדר להיות  $|d - r|$  כאשר  $d$  הוא המרחק של הנקודה ממרכז המעגל,  $d = \sqrt{(p_1 - a)^2 + (p_2 - b)^2}$ .

(א) כתוב פרוצדורה ב-Mupad אשר מקבלת כקלט את הפרמטרים של מעגל,  $a, b, r$ , ורשימה של נקודות, ומחזירה כפלט את המרחק המינימלי, את המרחק המקסימלי ואת המרחק הממוצע של נקודה ברשימה מהמעגל.

(ב) כתוב פרוצדורה ב-Mupad אשר מקבלת כקלט רשימה של מעגלים, רשימה של נקודות, ומספר חיובי  $D$ , ומחזירה כפלט רשימה של הנקודות שהמרחק שלהם מלפחות אחד המעגלים הוא פחות או שווה  $D$ .

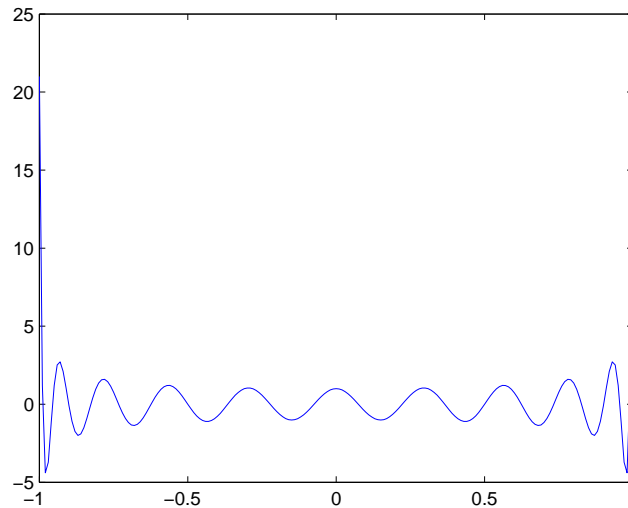
3. הפולינומים  $U_n(x)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , מוגדרים על ידי  $U_0(x) = 1$ ,  $U_1(x) = 2x$  ו-

$$U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x), \quad n \geq 1$$

(א) הסבר איך היית מצייר ב-Mupad את הגרף של  $U_{20}(x)$  על הקטע  $x \in [-1, 1]$ .

(ב) הסבר איך היית מצייר ב-Matlab את הגרף של  $U_{20}(x)$  על הקטע  $x \in [-1, 1]$ .

(ג) הגרף של  $U_{20}(x)$  יוצא ככה:



(בשתי הקצוות הפונקציה עולה לערך 21.)

טוענים שהשטח מתחת/מעל לגרף בין כל זוג של שורשים עוקבים הוא שווה ל- $\frac{2}{21}$ . איך היית מאמת טענה זו, או ב-Mupad, או ב-Matlab?

בהצלחה!