בס"ד

שימושי מחשב במתמטיקה 88-151, פרופ' ג'. שיף

מועד ב', סמסטר ב', תשע"א - פתרונות

זמן המבחן: שעתיים.

מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס.

בחלק א' (50% של הציון) יש לענות על כל השאלות. ניקוד כל השאלות בחלק שווה.

בחלק ב' (50% של הציון) יש לענות על 2 מתוך 3 השאלות. ניקוד כל השאלות בחלק שווה.

יש לנמק היטב כל תשובה.

שים לב - יש הרבה פתרונות אפשריים לכל שאלה!!

חלק א'

1. כתוב פונקציה ב- Matlab אשר מקבלת כקלט את שלושת המספרים a, x_1, x_2 ומחזירה כפלט את הערך של האנטגרל

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{e^{-2(x-x_1)^2}}{e^{-(x-x_1)^2}+ae^{-(x-x_2)^2}}\,dx$$

כאן $\alpha=\min(x_1,x_2)-4$, ו- $\beta=\max(x_1,x_2)+4$.

```
function [ z ] = mb1( a, x1, x2 )
alpha = min(x1,x2)-4;
beta  = max(x1,x2)+4;
z = quad( @(x) exp(-2*(x-x1).^2)./(exp(-(x-x1).^2)+a*exp(-(x-x2).^2)) , alpha , beta);
end
```

---

2. כתוב פונקציה ב- Matlab אשר מקבלת כקלט את שני המספרים ϵ, N, כאשר N הוא שלם חיובי, ומחזירה כפלט את הערך של הסכום

$$\sum_{i=0}^{N} \epsilon \sin\left(\frac{1}{1+\epsilon^2 i^2}\right)$$

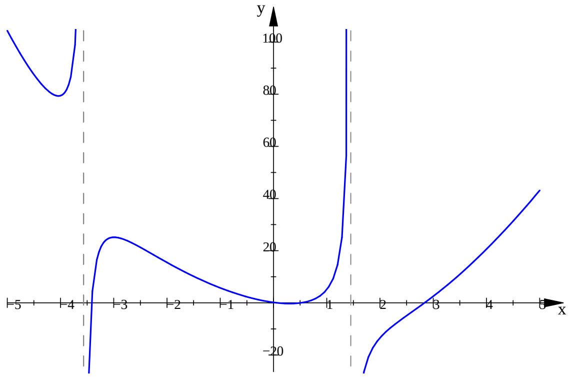
```
function [ z ] = mb2( epsilon, N )
z = 0;
for i=0:N
    z = z + sin(1/(1+epsilon^2*i^2));
end
z = z*epsilon;
end
```

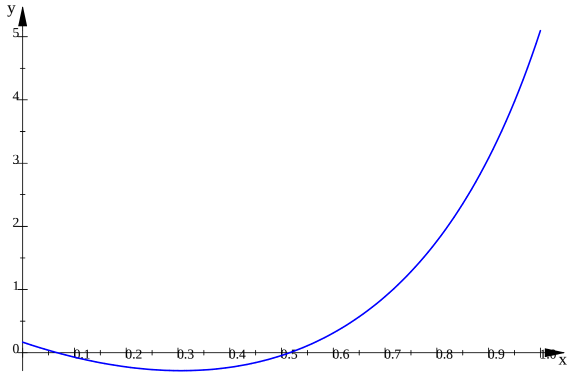
---

3. למטה מופיעים גרפים של הפונקציה

$$f(x)=\frac{3x^4-30x^2+17x-1}{x^2+2x-6+\sin x}$$

בקטעים $x\in[-5,5]$ (שמאל) ו-$x\in[0,1]$ (ימין).





איך היית מוצא ב- Mupad את (קואורדינטות ה- x וה- y של) שלושת הנקודות הקריטיות של $f(x)$? יש לעבוד ל-20 ספרות דיוק.

```
DIGITS:=20;
 20
y:=(3*x^4-30*x^2+17*x-1)/(x^2+2*x-6+sin(x));
```

$$\frac{3x^4-30x^2+17x-1}{2x+\sin(x)+x^2-6}$$

```
z:=diff(y,x);
```

$$\frac{12x^3-60x+17}{2x+\sin(x)+x^2-6}-\frac{(2x+\cos(x)+2)\,(3x^4-30x^2+17x-1)}{(2x+\sin(x)+x^2-6)^2}$$

```
x1:=numeric::solve(z=0,x=-4); y1:=float(subs(y,x=op(x1)))
 {-4.0395203150317279608}
 79.31908528021276272
x2:=numeric::solve(z=0,x=-3); y2:=float(subs(y,x=op(x2)))
 {-2.9928714184864753268}
 25.151955420273130803
x3:=numeric::solve(z=0,x=0.3); ; y3:=float(subs(y,x=op(x3)))
 {0.30595169160348888646}
 -0.28423590526319826083
```

---

4. כתוב את הפקודות שהיית משתמש בהן ב- Mupad למצוא את הקשר בין הפרמטרים r,s כך שלמטריצה

$$\begin{pmatrix}1 & r & s\\ 2 & -3 & 7\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix}$$

יש ערך עצמי 1 . הקשר הדרוש הוא $r=-8s$. במקרה זה, איך היית מוצא את שאר הערכים העצמיים של המטריצה ?

```
use(linalg)
Warning: 'htranspose' already has a value, not exported. [use]
Warning: 'transpose' already has a value, not exported. [use]
Warning: 'det' already has a value, not exported. [use]
```

```
A:=matrix(3,3,[1,r,s,2,-3,7,1,2,4])
```

$$\begin{pmatrix} 1 & r & s \\ 2 & -3 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

```
p:=charpoly(A,x)
```

$$x^3 - 2x^2 + (-2r - s - 25)\,x + r - 7s + 26$$

```
subs(expr(p),x=1)
```

$$-r - 8s$$

```
A1:=subs(A,r=-8*s)
```

$$\begin{pmatrix} 1 & -8s & s \\ 2 & -3 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

```
eigenvalues(A1)
```

$$\left\{1,\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}\,\sqrt{7-4s}}{2},\ \frac{\sqrt{15}\,\sqrt{7-4s}}{2} + \frac{1}{2}\right\}$$

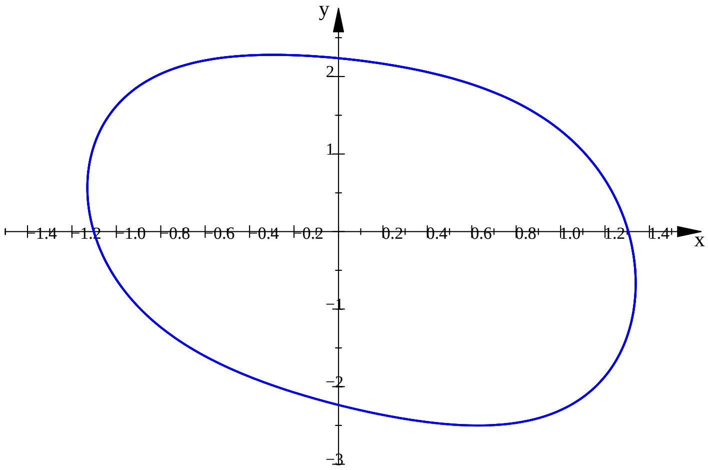
5. כתוב פונקציה ב- Matlab אשר מקבלת כקלט את הפרמטר s ומחזירה כפלט את האורך של וקטור הפתרון $\mathbf{x}$ של מערכת

$$\begin{pmatrix} 1 & -8s & s \\ 2 & -3 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

```
function [ z ] = mb3( s )
A = [ 1 -8*s s ; 2 -3 7 ; 1 2 4 ];
b = [ 1 ; 2 ; 4 ];
x = A\b;
z = norm(x);
end
```

חלק ב'

1. רוצים למצוא את המשולש עם השטח הכי גדול עם קודקודים על העקומה $x^4+2x^2+y^2+xy-x=5$ המופיעה למטה.



כדי לעשות כן יש לכתוב פונקציות ב- Matlab לבצע את הפעולות הבאות:

(א) בהנתן המקדמים של פולינום שיודעים מראש שיש לו רק שורש ממשי חיובי אחד, למצוא את השורש הזה.

(ב) בהנתן זוית θ, למצוא מספר חיובי r כך שהנקודה $(x,y)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$ נמצאת אל העקומה $x^4+2x^2+y^2+xy-x=5$.

(ג) בהנתן שלוש זויות $\theta_1,\theta_2,\theta_3$, למצוא שלוש נקודות $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)$ על העקומה כמו בסעיף הקודם, ולחשב את השטח של המשולש עם קודקודים בשלוש נקודות אלה. (הפונקציה תקבל כקלט את שלושת הזויות ותחזיר כפלט את השטח, אין צורך להחזיר כפלט את הנקודות.)

(ד) למצוא את הזוויות שנותנות את המשולש, כמו בסעיף הקודם, עם השטח הכי גדול.

(א)

```
function [ a ] = posroot(v)
% find first positive root of the polynomial with coefficient vector v
rs=roots(v);
for i=1:length(rs)
    if imag(rs(i))==0 && rs(i)>0
       a=rs(i);
       break
   end
end
```

(ב)

```
function [ r ] = findr( t )
% find r such that (r cos(t), r sin(t)) is on x^4 + 2*x^2 + y^2 + x*y - x = 5
v=[cos(t)^4, 0, 2*cos(t)^2+sin(t)^2+cos(t)*sin(t), -cos(t), -5];
r=posroot(v);
end
```

(ג)

```
function [ A ] = curvearea( ts )
% area A as a function of ts = (t1,t2,t3)
r1=findr(ts(1));
r2=findr(ts(2));
r3=findr(ts(3));
A=norm(cross( [r3*cos(t3)-r1*cos(t1), r3*sin(t3)-r1*sin(t1) ,0], ...
              [r2*cos(t2)-r1*cos(t1), r2*sin(t2)-r1*sin(t1) ,0] ))/2;
end
```

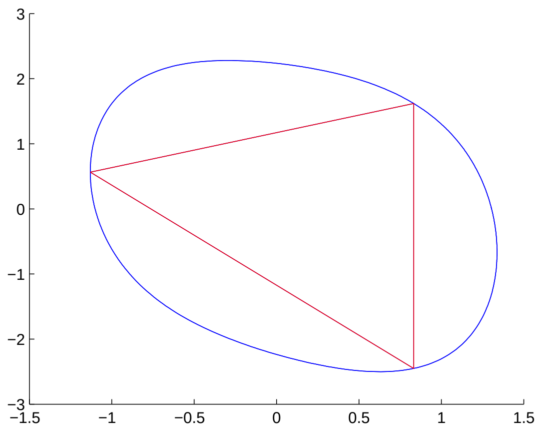
(ד) למצוא את הזוויות שעבורן השטח הוא מקסימלי יש לעשות, לדוגמה,

```
[a,b]=fminsearch(@(x) -curvearea(x), [pi/6, 2*pi/3, 4*pi/3])
```

מקבלים פלט

```
a =    1.0959    2.6780    5.0398
b =   -3.9937
```

הנה תמונה של המשולה הגדולה ביותר:



---

2. המרחק של נקודה $P=(p_1,p_2)$ מהמעגל $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ מוגדר להיות $|d-r|$ כאשר d הוא המרחק של הנקודה ממרכז המעגל, $d=\sqrt{(p_1-a)^2+(p_2-b)^2}$.

(א) כתוב פרוצדורה ב- Mupad אשר מקבלת כקלט את הפרמטרים של מעגל, a,b,r, ורשימה של נקודות, ומחזירה כפלט את המרחק המינימלי, את המרחק המקסימלי ואת המרחק הממוצע של נקודה ברשימה מהמעגל.

(ב) כתוב פרוצדורה ב- Mupad אשר מקבלת כקלט רשימה של מעגלים, רשימה של נקודות, ומספר חיובי D, ומחזירה כפלט רשימה של הנקודות שהמרחק שלהם מלפחות אחד המעגלים הוא פחות או שווה D.

(א)

In the procedure below l is a list of points, of the form [[x1,y1], [x2,y2], [x3,y3], ...]

```
ds:=proc(a,b,r,l)
   local mindist, maxdist, totdist, n, i, d;
   begin
   n:=nops(l);
   d:=sqrt( (op(op(l,1),1)-a)^2 + (op(op(l,1),2)-b)^2 );
   mindist:=abs(d-r);
   maxdist:=abs(d-r);
   totdist:=abs(d-r);
   for i from 2 to n do
        d:=sqrt( (op(op(l,i),1)-a)^2 + (op(op(l,i),2)-b)^2 );
        if abs(d-r)<mindist then mindist:=abs(d-r) end_if;
        if abs(d-r)>maxdist then maxdist:=abs(d-r) end_if;
        totdist:=totdist+abs(d-r);
   end_for;
   return( [ mindist, maxdist, totdist/n ]);
end_proc;
```

proc ds(a, b, r, l) ... end

sample runs:

```
ds(0,0,1,[[0,0],[1,0],[1,1]])
```

$\left[0,\ 1,\ \frac{\sqrt{2}}{3}\right]$

```
ds(0,0,1,[[2,0],[0,2],[1,sqrt(3)],[-1,sqrt(3)]])
```

[1, 1, 1]

(ב) הרעיון: לרוץ על כל הנקודות. לכל נקודה לרוץ על על המעגלים עד שיש אחד מספיק "קרוב" לנקודה, ואם כן להוסיף את הנקודה לרשימה שתהיה הפלט.

In the procedure below listcirc is a list of circles of the form [[a1,b1,r1],[a2,b2,r2],...]
and listpt is a list of points of the form [[x1,y1],[x2,y2],...]

```
f:=proc( listcirc, listpt, D )
    local ans,i,j,p,c,d;
    begin
    ans:=null();
    for i from 1 to nops(listpt) do
        p:=op(listpt,i);
        for j from 1 to nops(listcirc) do
            c:=op(listcirc,j);
            d:=sqrt( (op(p,1)-op(c,1))^2 + (op(p,2)-op(c,2))^2 );
            if abs(d-op(c,3))<D then
               ans:=ans,p;
               break;
            end_if;
        end_for;
    end_for;
    return([ans]);
end_proc;
```

proc f(listcirc, listpt, D) ... end

sample runs

```
f( [[0,0,1],[0,0,2],[0,0,3]], [[4,0],[5,0],[6,0]], 3/2 )
```

[[4, 0]]

```
f( [[0,0,1],[0,0,2],[0,0,3]], [[4,0],[5,0],[6,0]], 20 )
```

[[4, 0], [5, 0], [6, 0]]

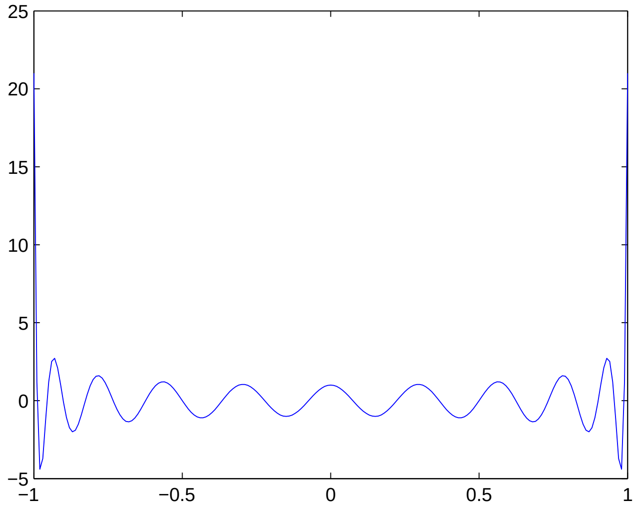
3. הפולינומים $U_n(x)$, $n=0,1,2,\ldots$, מוגדרים על ידי $U_0(x)=1$, $U_1(x)=2x$ ו-

$$U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x)\ , \qquad n \geq 1$$

(א) הסבר איך היית מצייר ב- Mupad את הגרף של $U_{20}(x)$ על הקטע $x \in [-1,1]$.

(ב) הסבר איך היית מצייר ב- Matlab את הגרף של $U_{20}(x)$ על הקטע $x \in [-1,1]$.

(ג) הגרף של $U_{20}(x)$ יוצא ככה:



(בשתי הקצוות הפונקציה עולה לערך 21.)

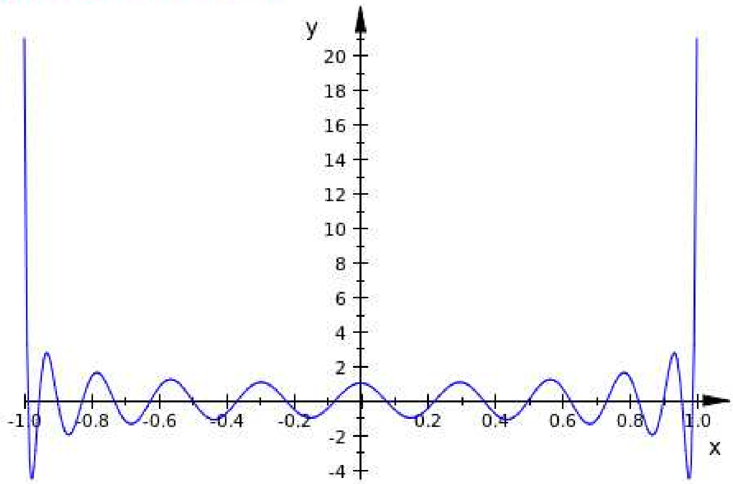
טוענים שהשטח מתחת/מעל לגרף בין כל זוג של שורשים עוקבים הוא שווה ל- $\frac{2}{21}$. איך היית מאמת טענה זו, או ב- Mupad, או ב- Matlab ?

(א)

```
U20:=proc(x)
local a,b,c,n;
begin
a:=1;
b:=2*x;
for n from 2 to 20 do
   c:=simplify(2*x*b-a);
   a:=b;
   b:=c;
end_for;
return(c);
end_proc
```

proc U20(x) ... end

```
plot(U20(x),x=-1..1)
```



(ב) להגדיר פונקציה על ידי

```
function [ c ] = u20( x )
a=ones(size(x));
b=2*x;
for i=2:20
    c=2*x.*b-a;
    a=b;
    b=c;
end
end
```

ולעשות

```
x=-1:0.01:1;
plot(x,u20(x))
```

(ג) האימות הפשוטה ביותר היא פשוט לחשב באופן נומרי את השטח מתחת לגרף בין שני שורשים עוקבים. לדוגמה לעשות

```
p:=U20(x);
```

$$1048576\,x^{20} - 4980736\,x^{18} + 10027008\,x^{16} - 11141120\,x^{14} + 7454720\,x^{12} - 3075072\,x^{10} + 768768\,x^{8} - 109824\,x^{6} + 7920\,x^{4} - 220\,x^{2} + 1$$

```
x1:=numeric::fsolve(U20(x),x=-0.95);  x2:=numeric::fsolve(U20(x),x=-0.9);
```

$[x = -0.9555728058]$

$[x = -0.9009688679]$

```
int(p, x=op(op(x1,1),2)..op(op(x2,1),2))
```

0.09523809524

```
float(2/21)
```

0.09523809524