

1. (א) מצא קבועים c_0, c_1, c_2 כך שהפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + \sin x - 1 & x \leq 4 \\ e^{-x} (c_0 + c_1x + c_2x^2) & x > 4 \end{cases}$$

היא רציפה ובעלת שתי נגזרות רציפות בנקודה $x = 4$.
כמו כן מצא קבועים d_0, d_1, d_2 כך שהפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} e^x (d_0 + d_1x + d_2x^2) & x < -1 \\ 3x^2 + \sin x - 1 & x \geq -1 \end{cases}$$

היא רציפה ובעלת שתי נגזרות רציפות בנקודה $x = -1$.

(ב) כתוב פרוצדורה אשר מקבלת כקלט ביטוי $f(x)$ (כגון $f(x) = 3x^2 + \sin x - 1$) ושני מספרים a, b עם $a < b$, ומחזירה את הביטוי

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} e^x (d_0 + d_1x + d_2x^2) & x < a \\ f(x) & a \leq x \leq b \\ e^{-x} (c_0 + c_1x + c_2x^2) & x > b \end{cases}$$

כאשר c_0, c_1, c_2 הם קבועים כך ש- $\tilde{f}(x)$ היא רציפה ובעלת שתי נגזרות רציפות ב-
 $x = b$, ו- d_0, d_1, d_2 הם קבועים כך ש- $\tilde{f}(x)$ היא רציפה ובעלת שתי נגזרות רציפות
ב- $x = a$.

(ג) אם $f(x) = x \sin x + \cos x$, $a = -1$, $b = 1$, מצא את $\tilde{f}(x)$ כמו בסעיף הקודם, ומצא את נקודות המקסימום הגלובליות של $\tilde{f}(x)$ באופן מדויק.

2. אם

$$f(x) = \frac{x}{x^{\sin x} - 1}$$

(א) צייר גרפים של $f(x)$ בקטעים $0 < x < 0.5$ ו- $0 < x < 0.005$.

(ב) שאל את מיופד מה זה

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

האם הערך שמיופד נותן סביר לאור הגרפים בסעיף א?

(ג) כדי לאמת את התוצאה, מצא פתרונות של המשוואות

$$f(x) = -0.1, \quad f(x) = -0.01, \quad f(x) = -0.001$$

בכמה ספרות דיוק היה צריך לעבוד למצוא פתרון של $f(x) = -10^{-10}$?

3. אם

$$g(x) = \left| \sin \frac{1}{x} \right|^{1/x^2}$$

- (א) צייר גרפים של $g(x)$ בקטעים $0 < x < 0.1$, $0 < x < 0.01$, ו- $0 < x < 0.001$.
- (ב) לפי הגרפים, מהו, כנראה, הערך של הגבול $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$? מהו הערך לפי מיופד? ומהיא התשובה הנכונה?
- (ג) למה הגרפים בסעיף (א) הם מטעים? האם ניתן לצייר גרף שאינו מטעה במיופד? (מומלץ להעזר ב- help על הפונקציה plot)

4. אם

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi e^{x \cos t} dt$$

- (א) מצא את פולינום הטיילור מסדר 10 של $f(x)$, $P_{10}(x)$ ואת פולינום הטיילור מסדר 50 של $f(x)$, $P_{50}(x)$. ("פולינום טיילור מסדר n " הכוונה היא טור טיילור עד לאיברים מסדר n , עד ועד בכלל.)
- (ב) הפונקציה $f(x)$ מקיימת את המשוואה

$$x f''(x) + f'(x) - x f(x) = 0$$

- (לא קשה להוכיח למי שרוצה, לא צריך מיופד!)
מה ניתן להגיד על $x P_{10}''(x) + P_{10}'(x) - x P_{10}(x)$ ו- $x P_{50}''(x) + P_{50}'(x) - x P_{50}(x)$ באופן כללי מה ניתן להגיד על $x P_n''(x) + P_n'(x) - x P_n(x)$?

5. אם

$$f(x) = \cos(\sin x \cdot \log(1+x))$$

ו- $p_{15}(x)$ הוא פולינום הטיילור של $f(x)$ מסדר 15

- (א) צייר גרפים של $f(x)$ ו- $p_{15}(x)$ עבור $-0.99 < x < 0.99$.
- (ב) מצא את הקטע הכי גדול $[-a, a]$ שבו הטעות ב- $p_{15}(x)$ כקירוב ל- $f(x)$, הוא פחות מ- 0.01.
- (ג) מצא את ה- n הכי קטן כך שהטעות המקסימלית בפולינום טיילור מסדר n כקירוב ל- $f(x)$ על הקטע $[-0.95, 0.95]$ הוא פחות מ- 0.01.

6. אם

$$f(x, y) = \cos(x \sin y + y)$$

ו- $p_n(x, y)$ מסמן את פולינום הטיילור מסדר n של $f(x, y)$ דהיינו כל האיברים בטור הטיילור מהצורה $cx^a y^b$ עם $a + b \leq n$

- (א) מצא את $p_6(x, y)$ ואת $p_8(x, y)$ וצייר גרפים של $f - p_6$, $f - p_8$ בריבוע $[-1, 1] \times [-1, 1]$ הערה: עושים גרף תלת-מימדי של פונקציה f של שני משתנים x, y על ידי הפקודה `plotfunc3d(f, x=-1..1, y=-1..1)`
- (ב) מה נותן קירוב יותר טוב ל- f על הריבוע, p_6 או p_8 ?
- (ג) מה נותן קירוב יותר טוב ל- f על העיגול $x^2 + y^2 < 1$? (רמז: בדוק את השגיאות על השפה.)

בהצלחה!