

1. (א) אם

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -1 & t & -1 \\ t & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

מצא את שני הערכים של t כך ש- $\det(M) = 0$. לכל אחד משני הערכים האלה, מצא ווקטור b כך שקיים פתרון למערכת $Mx = b$, ומצא את הפתרון הכללי של המערכת עבור בחירה זו של b .

(ב) אם

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ s & t & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

מצא את הערך של t כך ש- $\det(M) = 0$, ומצא, במקרה ש- t מקבל ערך כזה, את הגרעין של M . האם הגרעין תלוי ב- s ? נמק.

2. מצא את היחס בין r ו- s כך יש למטריצה

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \\ -r & 1 & r & 2 \\ s & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

יש ערך עצמי 1. מצא את הערכים של r, s כך שיש למטריצה ערך עצמי 1 כפול. במקרים אלה מצא גם את הערכים העצמיים האחרים.

3. M היא מטריצה מגודל $(n-1) \times (n-1)$

$$M = n^2 \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \ddots & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & \ddots & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

מצא גרף של 3 הערכים העצמיים הכי גדולים של M כפונקציה של n (עבור n עד 200). אם משניים את הרכיב האחרון (כלומר רכיב $(n-1), (n-1)$) של M מ-2 ל-1, איך זה משפיע על הערכים העצמיים האלה?

4. תהא $M(s, t)$ המטריצה מגודל 4×4 משאלה 1. סעיף (ב), ויהיו $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ הערכים העצמיים של M . מצא את s, t כך שהפונקציה

$$\sum_{i=1}^4 |\lambda_i - L|^2$$

היא מינימלית. כאן L הוא הממוצע של הערכים העצמיים, כלומר

$$L = \frac{1}{4} (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)$$

5. תהא M המטריצה

$$M = \begin{pmatrix} 1.8 & 0.9 & 0.5 & 1.1 \\ 0.9 & 0.7 & 1.0 & s \\ 0.5 & 1.0 & 0.3 & 0.6 \\ 1.1 & s & 0.6 & 1.4 \end{pmatrix}$$

(s פרמטר ממשי). מצא s כך שהסכום של הערך העצמי הכי גדול של M והערך העצמי הכי קטן של M הוא כמה שאפשר יותר גדול. מספיק תשובה ל-3 ספרות דיוק.

6. המטריצה M מוגדרת על ידי

$$M(\theta, a) = \begin{pmatrix} 1 & 2i \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) - 1 \\ 0 & 2 & \sin(2\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 3 & e^{ia} \sin(2\theta) \\ i(\cos(\theta) - \cos(2\theta)) & 0 & 0 & 4 + i \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

תאר את התפתחות הערכים העצמיים של M , כפונקציה של θ (אשר משתנה מ-0 עד 2π) במקרים $a = \frac{\pi}{2}, a = \frac{\pi}{4}, a = \frac{\pi}{6}, a = 0$.