בס"ד

מבוא להסתברות, 88-162-01 — ד"ר.גרמי שיף

תרגילים 8,9,10

1. ארבע פעמים אני מוציא כדור מכד שבתוכו שלושה כדורים, אחד אדום, אחד שחור, ואחד לבן (אחרי כל הוצאה אני מחזיר את הכדור לכד). אם R הוא מספר הפעמים שאני מוציא את הכדור האדום ו-B הוא מספר הפעמים שאני מוציא את הכדור השחור, מצא את ההתפלגות של הזוג (R, B) ואת ההתפלגויות השוליות של R ו-B.

2. בסדרה של נסויי ברנולי (נסויים בלתי-תלויים שבכל אחד יש סכוי p להצלחה), X_1 הוא מספר הכשלונות לפני ההצלחה הראשונה, ו-X_2 הוא מספר הכשלונות בין ההצלחה הראשונה וההצלחה השנייה. מצא את התפלגות הזוג (X_1, X_2), ואת ההתפלגות של הסכום $X_1 + X_2$.

3. בנסויי מסויים יש שלוש תוצאות אפשריות, A, B, C, שקורות בהסתברויות p, q, r בהתאמה ($p + q + r = 1$). אם בסדרה של נסויים בלתי תלויים כאלה X הוא מספר הפעמים שקורת התוצאה A לפני התוצאה C, ו-Y הוא מספר הפעמים שקורת התוצאה B לפני התוצאה C, מצא את ההתפלגות של הזוג (X, Y), ואת ההתפלגויות השוליות של X ו-Y.

4. נבחר באקראי מספר X מבין המספרים $1, 2, 3, 4, 5$. אחר כך נבחר עוד מספר Y מבין מספרים אלה, אבל לא גדול מ-X (זאת אומרת, Y נבחר מהמספרים $1, \ldots, X$). מצא את ההתפלגות של הזוג (X, Y), ואת ההתפלגויות המותנות $\mathbf{P}(X = x | Y = y)$, עבור $y = 1, 2, 3, 4, 5$. האם X ו-Y בלתי תלויים?

5. מטילים קוביה פעמיים. תהא X התוצאה הגדולה מבין השתים ו-Y התוצאה הקטנה. מצא את ההתפלגויות המותנות $\mathbf{P}(X = x | Y = y)$, עבור $y = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. האם X ו-Y בלתי תלויים?

6. פונקציית הצפיפות המשותפת של הזוג (X, Y) היא

$$f(x, y) = c(y^2 - x^2)e^{-y}, \qquad -y \le x \le y, 0 < y < \infty$$

מצא את c ואת ההתפלגויות השוליות של X ו-Y.

7. פונקציית הצפיפות המשותפת של הזוג (X, Y) היא

$$f(x, y) = \frac{6}{7}\left(x^2 + \frac{xy}{2}\right), \qquad 0 < x < 1, 0 < y < 2$$

מצא את ההתפלגות השולית של X, ואת ההסתברויות $\mathbf{P}(X > Y)$ ו-$\mathbf{P}(Y > \frac{1}{2} \mid X < \frac{1}{2})$.

8. אם X, Y הם משתנים מקריים בלתי תלויים עם התפלגות $E(\lambda)$, מצא את ההתפלגות של $X/(X+Y)$.

9. אם זרם I עובר דרך התנגדות R, הכוח שנוצר הוא $W = I^2 R$. אם I ו-R הם משתנים מקריים בלתי תלויים עם פונקציות צפיפות

$$f_I(x) = 6x(1-x) \qquad 0 \le x \le 1$$
$$f_R(x) = 2x \qquad 0 \le x \le 1$$

מצא את ההתפלגות של W.

10. אם פונקצית הצפיפות המשותפת של הזוג (X, Y) היא

$$f(x,y) = c(y^2 - x^2)e^{-y}, \qquad -y \le x \le y, 0 < y < \infty$$

מצא את ההתפלגות המותנית של X אם נתון הערך של Y.

11. חשב את השונות של
    א. משתנה מקרי פאוסון
    ב. משתנה מקרי גיאומטרי
    ג. משתנה מקרי מערכתי

בדוק שבגבול בו התפלגות הבינומית שואפת להתפלגות פאוסון, השונות של התפלגות הבינ-ומית שואפת לשונות של התפלגות פאוסון.

12. חזור לשאלות 5,6 בתרגיל 4 ו-1,2 בתרגיל 6. מצא את השונויות של ההתפלגויות שמופיעות בשאלות אלה.

13. המשתנים $X_1, \ldots, X_n$ הם בלתי תלויים בעלי התפלגות זהה, עם תוחלת μ ושונות σ^2. המשתנה המקרי $\bar{X}$ מוגדר על ידי $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$.
    א. הוכח ש- $\mathbf{E}[\bar{X}] = \mu$.
    ב. הוכח ש- $\mathrm{Var}(\bar{X}) = \sigma^2/n$.
    ג. הוכח ש- $\mathbf{E}[\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2] = (n-1)\sigma^2$.

14. א. אם $Z \sim N(0,1)$, מצא את $\mathbf{E}[Z^3]$ ו- $\mathbf{E}[Z^4]$.
    ב. אם $Z \sim N(0,1)$ ו- $Y = a + bZ + cZ^2$ (a, b, c קבועים), מצא את $\rho(Y, Z)$.

15. הוכח שאם a, b, c, d קבועים ו-X, Y משתנים מקריים אז

$$\mathrm{cov}(aX + bY, cX + dY) = ac\mathrm{Var}(X) + (ad + bc)\mathrm{cov}(X,Y) + bd\mathrm{Var}(Y)$$

16. עבור קבוצה של 100 איש, מצא את התוחלת של מספר הימים בשנה שהם ימי הולדת של בדיוק שלושה אנשים, ואת התוחלת של מספר הימים בשנה שהם ימי הולדת של איש אחד לפחות.

17. אם 10 זוגות נשואים יושבים באופן אקראי מסביב לשולחן, מצא את התוחלת ואת השונות של מספר הנשים ש-יושבות ליד בעליהן.

18. מצא את הפונקציה יוצרת המומנטים של

א. משתנה מקרי $U(a,b)$

ב. משתנה מקרי גיאומטרי

ג. משתנה מקרי X בעל התפלגות

$$\mathbf{P}(X=0)=\mathbf{P}(X=3)=\tfrac{1}{6}$$
$$\mathbf{P}(X=1)=\mathbf{P}(X=2)=\tfrac{1}{3}$$

ד. משתנה מקרי בעל ההתפלגות שניתנה בתרגיל 7, שאלה 1.

בכל המקרים, השתמש בפונקצייה היוצרת לחשב את התוחלת ואת השונות.

19. לזוג (X,Y) יש התפלגות הנתונה על ידי ההסתברויות:

$$\mathbf{P}(X=1,Y=1)=\tfrac{1}{25}$$
$$\mathbf{P}(X=2,Y=1)=\tfrac{2}{25}\quad \mathbf{P}(X=2,Y=2)=\tfrac{4}{25}$$
$$\mathbf{P}(X=3,Y=1)=\tfrac{3}{25}\quad \mathbf{P}(X=3,Y=2)=\tfrac{6}{25}\quad \mathbf{P}(X=3,Y=3)=\tfrac{9}{25}$$

א. מצא את ההתפלגויות השוליות של X ושל Y.

ב. מצא את $\mathbf{E}(X)$, $\mathbf{E}(Y)$, $\mathrm{Var}(X)$, $\mathrm{Var}(Y)$, $\mathrm{cov}(X,Y)$, $\rho(X,Y)$.

ג. מצא את ההתפלגות של X אם נתון ש-$Y=2$, ואת התוחלת המותנית $\mathbf{E}(X\mid Y=2)$.

ד. מצא את ההתפלגות של Y אם נתון ש-$X=2$, ואת התוחלת המותנית $\mathbf{E}(Y\mid X=2)$.

20. לזוג (X,Y) יש צפיפות משותפת

$$f(x,y)=cxy \qquad 0\le x\le 3,\ 0\le y\le x$$

א. חשב את הקבוע c, ומצא את ההתפלגויות השוליות של X ושל Y.

ב. מצא את $\mathbf{E}(X)$, $\mathbf{E}(Y)$, $\mathrm{Var}(X)$, $\mathrm{Var}(Y)$, $\mathrm{cov}(X,Y)$, $\rho(X,Y)$.

ג. מצא את ההתפלגות של X אם נתון ש-$Y=2$, ואת התוחלת המותנית $\mathbf{E}(X\mid Y=2)$.

ד. מצא את ההתפלגות של Y אם נתון ש-$X=2$, ואת התוחלת המותנית $\mathbf{E}(Y\mid X=2)$.

21. מטילים קוביה תקינה. אם X הוא מספר הפעמים שמטילים עד שמופיע 6 (ועד בכלל), ו-Y הוא מספר הפעמים שמטילים עד שמופיע 5, מצא את $\mathbf{E}[X\mid Y=1]$ ואת $\mathbf{E}[X\mid Y=5]$.