בס"ד

מבוא להסתברות, 88-162-01 — ד"ר ג'רמי שיף
סמסטר ב' תשנ" ט : מועד א'

זמן המבחן: שלש שעות.
מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס.
ניקוד כל השאלות (אבל לא כל חלקי השאלות) שווה.
אין לענות על יותר משש מתוך שבע השאלות. פתרונות נכונים ומנומקים היטב ל-5 שאלות מספיקים לציון 100.

1. סטודנט שאיננו יודע כלום ניגש למבחן שבו שש שאלות, שלכל אחת התשובה היא או "כן" או "לא".
   א. מה ההסתברות שהסטודנט יקבל ציון 100?
   ב. מה ההסתברות שהוא יקבל 100 אם הוא יודע שיש שלוש שאלות עם תשובה "כן" ושלוש עם תשובה "לא"?
   ג. מה ההסתברות שהוא יקבל 100 אם הוא יודע שיש שלוש שאלות עם תשובה "כן" ושלוש עם תשובה "לא", וגם שאין רצף של שלוש שאלות עם אותה תשובה (לדוגמה, לא יתכן שלשאלות 1,2,6 התשובה "כן" ולשאלות 3,4,5 התשובה "לא")?

2. ההתפלגות של הציונים בקורס מסויים היא $N(76,8)$.
   א. מצא את ההסתברות שסטודנט יקבל ציון מעל 90.
   ב. מצא את ההסתברות שמתוך 100 סטודנטים יהיו לפחות 4 עם ציון מעל 90.
   ג. מרצה הקורס רוצה למצוא סטודנט טוב כדי לתרגל לשנה הבאה, ולכן הוא פונה אחד אחד לסטודנטים בקורס לשאול האם קבלו ציון מעל 90. מה היא התוחלת של מספר הסטודנטים אליהם הוא צריך לפנות עד שימצא מישהו מתאים?

3. למשתנה המקרי X יש צפיפות

$$f(x) = \frac{2}{N\pi}\sin^2 x \qquad 0 < x < N\pi$$

כאשר N שלם חיובי.
   א. מצא את הפונקציה היוצרת את המומנטים של X, $\phi_X(t)$.
   (רמז: $\int e^{tx}\cos 2x dx = \frac{e^{tx}(t\cos 2x + 2\sin 2x)}{4+t^2} + C$)
   ב. הוכח ש- $\lim_{t\to 0}\phi_X(t) = 1$.
   ג. חשב את התוחלת ואת השונות של X.

4. ההתפלגות המשותפת של הזוג (X,Y) ניתנה על ידי הטבלה

		X		
		-1	0	1
Y	-1	0	0	$\frac{1}{3}$
	0	0	$\frac{1}{2}$	0
	1	$\frac{1}{6}$	0	0

א. מצא את ההתפלגויות של X,Y ו-$X+Y$.
ב. מההתפלגויות שחשבת בסעיף א, מצא את התוחלת ואת השונות של (כל אחד מ-) X,Y ו-$X+Y$.
ג. מהתוצאות של סעיף ב, מצא את $\mathrm{cov}(X,Y)$.
ד. איך היית מחשב $\mathrm{cov}(X,Y)$ ישיר מטבלת ההסתברויות?

5. מהמשרד שלי אפשר לראות תחנת אוטובוסים שממנה יוצאים אוטובוסים בתדירות ממוצעת של אוטובוס אחד בכל 15 דקות. ניתן להניח שההתפלגות של הזמנים בין יציאות האוטובוסים היא מעריכית. יום אחד אני יוצא מהמשרד 10 דקות לאחר שיצא אוטובוס מהתחנה. משך הזמן שלוקח לי להגיע לתחנה הוא 6 דקות.
א. מה ההסתברות שתוך זמן ההליכה לתחנה אפסיד אוטובוס?
ב. מה ההסתברות שתוך זמן ההליכה אפסיד שני אוטובוסים? (יש להניח שהזמנים בין אוטובוסים בלתי תלויים זה בזה.)
ג. מה היא ההתפלגות הזמן שאחכה בתחנה אחרי שהגעתי?
בשאלה זאת מותר להסתמך, בלי הוכחה, על כל מה שלמדנו בכיתה על ההתפלגות המעריכית.

6. X ו-Y הם משתנים מקריים בלתי-תלויים, שניהם עם צפיפות

$$f(x) = cxe^{-x}, \qquad x > 0$$

כאשר c הוא קבוע.
א. מצא את הערך של c, וכתוב את הצפיפות המשותפת של הזוג (X,Y).
ב. חשב את ההסתברות $\mathbf{P}(X+Y>a)$ (a מספר חיובי).
ג. חשב את ההסתברות $\mathbf{P}(X < \frac{1}{2}a \mid X+Y>a)$. מה הוא הגבול כאשר a שואף ל-∞ של הסתברות זו? האם יש הסבר לכך מבחינה הסתברותית?

7. מטילים קוביה תקינה 10 פעמים. מה היא ההסתברות שמקבלים בדיוק חמש פעמים את התוצאה 6
א. ללא מידע נוסף?
ב. אם ידוע שמקבלים את התוצאה 6 לפחות פעם אחת?
ג. אם ידוע שמקבלים את התוצאה 2 בדיוק פעמיים?
ד. אם ידוע שסכום התוצאות הוא 35? (רמז: העזר במשפט הגבול המרכזי למצוא בערך את מספר הדרכים לקבל סכום 35.)