בס"ד

מבוא להסתברות, 88-162-01 ד"ר ג'רמי שיף

סמסטר ב' תשנ"ט : מועד ב'

זמן המבחן: שלש שעות.
מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס.
ניקוד כל השאלות (אבל לא כל חלקי השאלות) שווה.
אין לענות על יותר משש מתוך שבע השאלות.

1. כאשר בוחרים באקראי שתי נקודות על המעגל בעל רדיוס 1, מה היא ההסתברות שהמרחק ביניהם יהיה קטן מ-1 ? הקפד לכתוב הסבר מלא של כל ההנחות שלך.

2. הצפיפויות של המשתנים המקריים Y, X הם

$$f_X(x) = e^{2-x}, \qquad x > 2$$
$$f_Y(x) = \frac{24}{x^4}\ , \qquad x > 2$$

א. מצא את התוחלת ואת השונות של X ושל Y.
ב. מה גדול יותר, $\mathbf{P}(X > 4)$ או $\mathbf{P}(Y > 4)$?
ג. מה גדול יותר, $\mathbf{P}(X > 5)$ או $\mathbf{P}(Y > 5)$?

3. א בסדרה של 10,000 נסויי ברנולי, שבכל אחד הסיכוי להצלחה הוא p, התקבלו לפחות 3500 הצלחות. חשב (בערך) את ההסתברות לכך (1) כאשר $p = 0.33$, (2) כאשר $p = 0.35$.
ב. בסדרה של 10,000 נסויי ברנולי, שבכל אחד הסיכוי להצלחה הוא p, התקבלו בדיוק 3500 הצלחות. חשב (בערך) את ההסתברות לכך (1) כאשר $p = 0.33$, (2) כאשר $p = 0.35$.
(תזכורת: אם למשתנה המקרי X יש פונקציית הצטברות $F(x)$ וצפיפות $f(x)$, ו-ϵ קטן, אזי $F(x+\frac{\epsilon}{2}) - F(x-\frac{\epsilon}{2}) \approx \epsilon f(x)$).

4. שולפים 3 כדורים מכד שבו 6 כדורים שחורים, 4 לבנים ו-2 אדומים. אם מספר השחורים הנשלפים הוא B, מספר הלבנים W, ומספר האדומים R,
א. מצא את ההתפלגות המשותפת של הזוג (B, W).
ב. מצא את ההתפלגויות השוליות של B ו-W.
ג. חשב את התוחלת ואת השונות של B.
ד. מצא את ההסתברות $\mathbf{P}(R + W > B)$.

5. ארבע המשתנים המקריים X_1, X_2, X_3, X_4 הם בלתי תלויים ומוגדרים כך:
   - X_1 מקבל את הערכים $0, 1$, כל אחד בהסתברות $\frac{1}{2}$.
   - X_2 מקבל את הערכים $1, 3, 5$, כל אחד בהסתברות $\frac{1}{3}$.
   - X_3 מקבל את הערכים $0, 3$, כל אחד בהסתברות $\frac{1}{2}$.
   - X_4 מקבל את הערכים $1, 2, 3$, כל אחד בהסתברות $\frac{1}{3}$.

   א. מצא את הפונקציות היוצרות את המומנטים $\phi_{X_1}(t), \phi_{X_2}(t), \phi_{X_3}(t), \phi_{X_4}(t)$ של X_1, X_2, X_3, X_4.
   ב. האם $\phi_{X_1}(t)\phi_{X_2}(t) = \phi_{X_3}(t)\phi_{X_4}(t)$?
   ג. הוכח שההתפלגות של $X_1 + X_2$ זהה לזה של $X_3 + X_4$.

6. קבוצה של סטודנטים ניגשים לשני מבחנים. במבחן הראשון | שליש מהסטודנטים מקבלים את הציון A, שליש את הציון B ושליש את הציון C. במבחן השני רבע מקבלים A, חצי B, ורבע C. ידוע (1) אין סטודנטים שקבלו A באחד המבחנים ו-C במבחן השני, (2) מאלה שקבלו A במבחן השני 80% קבלו A במבחן הראשון, ו-(3) כל מי שקבל C במבחן השני קבל גם C במבחן הראשון. מצא את ההסתברויות דלהלן:
   א. מי שקבל C במבחן הראשון קבל C גם במבחן השני.
   ב. מי שקבל C במבחן הראשון קבל B במבחן השני.
   ג. מי שקבל B במבחן הראשון קבל B גם במבחן השני.

7. הצפיפות המשותפת של הזוג (X, Y) היא

$$f(x, y) = ax + by \qquad 0 < x, y < 1$$

   כאשר a, b קבועים.
   א. איזה תנאי צריכים a, b לקיים?
   ב. חשב את $\mathbf{E}[X]$, את $\mathbf{E}[Y]$ ואת-$\mathbf{E}[XY]$.
   ג. הוכח ש-$\mathrm{cov}(X, Y) = 0$ אם ורק אם או a או b מתאפסים, ואזי X ו-Y בלתי תלויים.