בס"ד

ד"ר.גרמי שיף

מבוא להסתברות, 88-162-01
תרגיל 4

1. במשחק מסויים, המשתתפים מנסים, לפי התור, לבצע פעולה, שההסתברות לבצע אותה בהצלחה היא p. הראשון לבצע את הפעולה בהצלחה הוא המנצח. אם יש שני משתתפים, מה ההסתברות שהמשתתף הראשון מנצח? מה אם יש שלושה משתתפים? מה אם יש n?

2. (רשות) בבית הנבחרים בארץ מסויימת יש n שומרנים ו-$100-n$ ליברלים. שומרן אף פעם איננו משנה את דעתו בין ההצבעות על נושא מסויים, אבל ליברל משנה את דעתו באופן רנדומלי עם הסתברות p. חבר מסויים כבר הצביע אותו דבר פעמיים על נושא מסויים. מה ההסתברות שיצביע אותו דבר בפעם השלישית?

3. מטילים שתי קוביות. מצא את ההתפלגויות של
   א. התוצאה הגדולה מבין השתים (המקסימום).
   ב. התוצאה הקטנה מבין השתים (המינימום).
   ג. מכפלת שתי התוצאות.
   בכל מקרה, בדוק שסכום ההסתברויות שווה ל-1.

4. מטילים מטבע n פעמים. אם X הוא ההפרש בין מספר הפעמים שמתקבל "ראש" ומספר הפעמים שמתקבל "זנב", מה הערכים האפשריים של X ? מצא את ההתפלגות של X, ובדוק שסכום ההסתברויות שווה ל-1.

5. משתנה מקרי X מקבל את הערכים $0,1,2,3,4$ בהסתברויות

$$\mathbf{P}(X=i)=\frac{k-i}{3k} \qquad i=0,1,2,3,4.$$

   מצא את הערך של הקבוע k, ואת התוחלת של X.

6. משתנה מקרי X מקבל את הערכים $0,1,2,\ldots$ בהסתברויות

$$\mathbf{P}(X=i)=\frac{c}{3^i} \qquad i=0,1,2,\ldots.$$

   מצא את הערך של הקבוע c, את התוחלת של X, את ההסתברות ש-$X>5$, ואת ההסתברות ש-X לא זוגי.

7. ההסתברות שבמשפחה יש n ילדים היא αp^n, כאשר $n \geq 1$. מצא את הערך המקסימלי של הקבוע α. (רמז: מה הסתברות שלא יהיו כלל ילדים במשפחה?) אם ההסתברויות ללידת זכר או נקבה הן שוות, וה"תוצאות" של כל לידה אינן תלויות זו בזו, מצא את ההתפלגות של מספר הבנים במשפחה.

8. כאשר מטילים מטבע מסויים, מתקבל "ראש" בהסתברות p ו"זנב" בהסתברות $1-p$.
   א. מטילים את המטבע עד שמקבלים "ראש". אם X הוא מספר הפעמים שהמטבע הוטל, מצא את התוחלת של X, ואת ההסתברות $\mathbf{P}(X \geq r)$ $(r = 1, 2, \ldots)$.
   ב. מטילים את המטבע עד שמקבלים "ראש" פעמיים. אם X הוא מספר הפעמים שהמטבע הוטל, מצא את ההתפלגות של X, ובדוק שסכום ההסתברויות שווה ל-1.

נוסחת עזר:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\alpha^n = \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} \ , \qquad |\alpha| < 1$$