בס"ד

מבוא להסתברות, 88-162-01 — ד"ר.גרמי שיף

תרגיל 12

1. עבור קבוצה של 100 איש, מצא את התוחלת של מספר הימים בשנה שהם ימי הולדת של בדיוק שלושה אנשים, ואת התוחלת של מספר הימים בשנה שהם ימי הולדת של איש אחד לפחות.

2. אם 10 זוגות נשואים יושבים באופן אקראי מסביב לשולחן, מצא את התוחלת ואת השונות של מספר הנשים ש-יושבות ליד בעליהן.

3. מצא את הפונקציה יוצרת המומנטים של
   א. משתנה מקרי $U(a,b)$
   ב. משתנה מקרי גיאומטרי
   ג. משתנה מקרי X בעל התפלגות

$$\mathbf{P}(X=0)=\mathbf{P}(X=3)=\tfrac{1}{6}$$
$$\mathbf{P}(X=1)=\mathbf{P}(X=2)=\tfrac{1}{3}$$

   ד. משתנה מקרי בעל ההתפלגות שניתנה בתרגיל 7, שאלה 1.

   בכל המקרים, השתמש בפונקצייה היוצרת לחשב את התוחלת ואת השונות.

4. לזוג (X,Y) יש התפלגות הנתונה על ידי ההסתברויות:

$$\mathbf{P}(X=1,Y=1)=\tfrac{1}{25}$$
$$\mathbf{P}(X=2,Y=1)=\tfrac{2}{25}\quad \mathbf{P}(X=2,Y=2)=\tfrac{4}{25}$$
$$\mathbf{P}(X=3,Y=1)=\tfrac{3}{25}\quad \mathbf{P}(X=3,Y=2)=\tfrac{6}{25}\quad \mathbf{P}(X=3,Y=3)=\tfrac{9}{25}$$

   א. מצא את ההתפלגויות השוליות של X ושל Y.
   ב. מצא את $\mathbf{E}(X)$, $\mathbf{E}(Y)$, $\mathrm{Var}(X)$, $\mathrm{Var}(Y)$, $\mathrm{cov}(X,Y)$, $\rho(X,Y)$.
   ג. מצא את ההתפלגות של X אם נתון ש-$Y=2$, ואת התוחלת המותנית $\mathbf{E}(X \mid Y=2)$.
   ד. מצא את ההתפלגות של Y אם נתון ש-$X=2$, ואת התוחלת המותנית $\mathbf{E}(Y \mid X=2)$.

5. לזוג (X, Y) יש צפיפות משותפת

$$f(x, y) = cxy \qquad 0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le x$$

א. חשב את הקבוע c, ומצא את ההתפלגויות השוליות של X ושל Y.
ב. מצא את $\mathbf{E}(X)$, $\mathbf{E}(Y)$, $\mathrm{Var}(X)$, $\mathrm{Var}(Y)$, $\mathrm{cov}(X, Y)$, $\rho(X, Y)$.
ג. מצא את ההתפלגות של X אם נתון ש-$Y = 2$, ואת התוחלת המותנית $\mathbf{E}(X \mid Y = 2)$.
ד. מצא את ההתפלגות של Y אם נתון ש-$X = 2$, ואת התוחלת המותנית $\mathbf{E}(Y \mid X = 2)$.

6. מטילים קוביה תקינה. אם X הוא מספר הפעמים שמטילים עד שמופיע 6 (ועד בכלל), ו-Y הוא מספר הפעמים שמטילים עד שמופיע 5, מצא את $\mathbf{E}[X \mid Y = 1]$ ואת $\mathbf{E}[X \mid Y = 5]$.