בס"ד

מבוא להסתברות, 88-162-01 — ד"ר ג'רמי שיף
סמסטר ב' תשנ"ח: מועד א'

זמן המבחן: שלש שעות.
מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס.
ניקוד כל השאלות שווה.
עליך לענות על כמה שאלות שאתה יכול, אך מספר קטן של פתרונות נכונים ומנומקים היטב עדיף ממספר גדול של פתרונות חלקיים.

1. א. המשתנה המקרי X מקבל את הערכים $1,2,3,4,5$ בהסתברויות

$$\mathbf{P}(X=r) = Cr(6-r)\ , \qquad r=1,2,3,4,5$$

מצא את C, ואת התוחלת ואת השונות של X.

ב. למשתנה המקרי X יש צפיפות

$$f(x) = Cx(6-x)\ , \qquad 0 \le x \le 6$$

מצא את C, ואת התוחלת ואת השונות של X.

2. למשתנה המקרי X יש צפיפות

$$f(x) = 12x^2(1-x)\ , \qquad 0 < x < 1$$

א. מצא את פונקצית ההצטברות של X, וחשב את $\mathbf{P}(X \le \frac{1}{3})$ ואת-$\mathbf{P}(X \le \frac{2}{3})$.
ב. חשב את הפונקציה יוצרת המומנטים של X, והשתמש בה לחשב את התוחלת ואת השונות של X.

3. יש צורך דחוף לשתי מנות של סוג דם נדיר, המצוי אצל רק 0.1% של האוכלוסיה. אם בודקים 3000 תורמים פוטנציאליים, חשב את ההסתברות שיימצאו שני תורמים מתאימים
א. על ידי שימוש ישיר בהתפלגות הבינומית.
ב. על ידי שימוש בקירוב פאוסון לבינום.
אם בודקים 20,000 תורמים פוטנציאליים, מה היא (בערך) ההסתברות שיימצאו לפחות 15 מתאימים ?

4. לזוג (X,Y) יש צפיפות משותפת

$$f(x,y) = Cxy(x+y)\ , \qquad 0 \le x,y \le 1$$

א. מצא את C ואת ההתפלגויות השוליות של X ושל Y.
ב. חשב את $\mathrm{cov}(X,Y)$. האם X ו-Y בלתי תלויים?
ג. מצא את $\mathbf{P}(X \le 2Y)$.

5. א. אם X ו-Y הם משתנים מקריים בדידים בלתי תלויים, ו- $Z = \max(X,Y)$, הוכח ש-

$$\mathbf{P}(Z=r) \ = \ \mathbf{P}(X=r)\mathbf{P}(Y \le r) + \mathbf{P}(X<r)\mathbf{P}(Y=r)$$

ב. אם X ו-Y הם משתנים מקריים רציפים בלתי תלויים ו- $Z = \max(X,Y)$, הוכח ש-

$$F_Z(a) = F_X(a)F_Y(a)$$

ולכן

$$f_Z(a) \ = \ f_X(a)F_Y(a) + F_X(a)f_Y(a)$$

(כאן f_X, f_Y, f_Z הם בהתאמה הצפיפויות של X,Y,Z, ו- F_X, F_Y, F_Z הם פונקציות ההצטברות.)

6. מחלקים 4 חפצים באופן אקראי בין 3 אנשים. אם X ו-Y הם בהתאמה מספר החפצים שמקבלים האיש הראשון והאיש השני, מצא
א. את ההתפלגות של הזוג (X,Y).
ב. את ההתפלגות השולית של X (בדוק ש- $X \sim B(4,\frac{1}{3})$).
ג. את ההתפלגות המותנית של X אם נתון ש- $Y=1$.

7. במדינה מסויימת יש שלוש תת-אוכלוסיות, X (30%), Y (30%) ו-Z (40%). בבחירות לראש הממשלה יש 4 מועמדים, A,B,C,D. מתת-האוכלוסיה X, 90% מצביעים ל-D, ו-5% לכל אחד מ-A ו-C. מתת-האוכלוסיה Y, 75% מצביעים ל-C, 20% ל-B ו-5% ל-A. מתת-האוכלוסיה Z, 10% מצביעים ל-D, ו-30% לכל אחד מ-A,B,C.
א. מה הן תוצאות הבחירות?
ב. אם ידוע שמישהו הצביע ל-C, מה ההסתברות שהוא מתת-אוכלוסיה Y?
ג. אם ידוע שמישהו הצביע או ל-B או ל-C, מה ההסתברות שהוא לא מתת-אוכלוסיה Z?

בהצלחה!!