בס"ד

מבוא להסתברות, 88-162-01 — ד"ר ג'רמי שיף
סמסטר ב' תשנ"ח: מועד ב'

זמן המבחן: שלש שעות.
מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס.
ניקוד כל השאלות שווה.
עליך לענות על כמה שאלות שאתה יכול, אך מספר קטן של פתרונות נכונים ומנומקים היטב עדיף ממספר גדול של פתרונות חלקיים.

1. למשתנה המקרי X יש צפיפות

$$f(x) = \tfrac{1}{2}x^2 e^{-x} \ , \qquad x > 0$$

   א. מצא את התוחלת של X.
   ב. מצא את פונקצית ההצטברות של X, והשתמש בה לחשב את $\mathbf{P}(X \leq 3)$. האם החציון גדול או קטן מהתוחלת להתפלגות זו?
   ג. חשב את הפונקציה יוצרת המומנטים של X, והשתמש בה לבדוק את התשובה שקבלת בסעיף א, ולמצוא את השונות של X.

2. איש מכירות פונה כל יום ל-20 לקוחות פוטנציאליים, ומוכר בהסתברות $\frac{1}{9}$.
   א. מה היא ההסתברות שימכור יותר משני מוצרים ביום מסויים?
   ב. מה היא (בערך) ההסתברות שבמשך חודש של 30 יום הוא ימכור בקצב של יותר מ-2 מוצרים ליום?
   ג. איש המכירות מקבל בונוס אם הוא מצליח למכור יותר מ-75 מוצרים בחודש מסויים. מה היא ההסתברות שיקבל את הבונוס?

3. לזוג (X, Y) יש צפיפות משותפת

$$f(x, y) = C(x + y)^2 \ , \qquad 0 \leq x, y \leq 1$$

   א. מצא את C ואת ההתפלגויות השוליות של X ושל Y.
   ב. חשב את $\operatorname{cov}(X, Y)$. האם X ו-Y בלתי תלויים?
   ג. מצא את התוחלת של X עם נתון ש-$Y = \frac{1}{3}$ (זאת אומרת, $\mathbf{E}\left[X \mid Y = \frac{1}{3}\right]$).

4. אם $X \sim U(0,\pi)$ ו- $Y = \sin X$
   א. איזה ערכים יכול לקבל Y ?
   ב. על ידי חישוב פונקצית ההצטברות של Y, הוכח שהצפיפות שלו היא

$$f_Y(a) = \frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \ , \qquad 0 \le a \le 1$$

5. מחלקים באופן אקראי 10 כדורים, מתוכם 5 שחורים ו-5 לבנים, לשתי קבוצות של 5. מצא את ההסתברות שהכדורים הלבנים מתחלקים
   א. 2 בקבוצה אחת ו-3 בקבוצה השניה
   ב. 1 בקבוצה אחת ו-4 בקבוצה השניה
   ג. 0 בקבוצה אחת ו-5 בקבוצה השניה

   בדוק שסכום ההסתברויות שחישבת הוא 1.

6. בכד יש 3 כדורים לבנים, 4 שחורים ו-5 אדומים. מוציאים את הכדורים אחד אחד, בלי החזרות.
   א. אם הכדור הראשון שמוצא הוא אדום, מה היא ההסתברות שהשני יהיה לבן?
   ב. אם אין אינפורמציה על הכדור הראשון, מה היא ההסתברות שהכדור השני יהיה לבן?
   ג. אם הכדור השני שמוצא הוא לבן, מה היא ההסתברות שהראשון היה אדום? השווה עם ההסתברות שהשני הוא אדום אם ידוע שהראשון לבן. אם ידוע שהכדור הרביעי שמוצא הוא שחור מה היא ההסתברות שהשני היה אדום?

7. שלושה משתנים מקריים X, Y, Z מקבלים את הערכים $1, 2, 3, 4, 5, 6$ בהסתברויות כדלקמן:

r	1	2	3	4	5	6
$\mathbf{P}(X = r)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
$\mathbf{P}(Y = r)$	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{5}{24}$
$\mathbf{P}(Z = r)$	$\frac{7}{48}$	$\frac{11}{48}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{11}{48}$	$\frac{7}{48}$

   א. מצא את התוחלת ואת השונות של X, Y, Z.
   ב. בהנחה ש-X, Y בלתי תלויים מצא את ההסתברות $\mathbf{P}(X > Y)$.
   ג. בהנחה ש-X, Z בלתי תלויים מצא את ההסתברות $\mathbf{P}(X > Z)$.

בהצלחה!!