בס"ד

ד"ר ג'רמי שיף

מבוא להסתברות, 88-162-01
מבחן לדוגמה

זמן המבחן: שלש שעות.
מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס.
ניקוד כל השאלות שווה.
עליך לענות על כמה שאלות שאתה יכול, אך מספר קטן של פתרונות נכונים ומנומקים היטב עדיף ממספר גדול של פתרונות חלקיים.

1. א. למשתנה המקרי X יש התפלגות פאוסון עם פרמטר $\lambda = 200$. מצא (בקירוב) את $\mathbf{P}(180 \leq X \leq 210)$ ואת $\mathbf{P}(X < 150)$.
   ב. אם למשתנה המקרי X יש התפלגות בינומית $B(5, \frac{1}{3})$, מצא את התוחלת של X ואת הערך השכיח של X.

2. א. בכמה דרכים ניתן לבחור 5 קלפים מתוך חפיסה?
   ב. בכמה דרכים ניתן לבחור 5 קלפים כך שלכולם ערך שונה?
   ג. בכמה דרכים ניתן לבחור 5 קלפים כך שארבע מהם הם מאותו הערך?
   ד. בכמה דרכים ניתן לבחור 5 קלפים כך שיש 2 מערך אחד ו-3 מערך אחר?
   (תזכורת: בחפיסת קלפים יש 52 קלפים, 4 מכל אחד מ-13 הערכים)

3. א. משתנה מקרי X מקבל את הערכים $\frac{\pi}{24}, \frac{3\pi}{24}, \frac{5\pi}{24}, \frac{7\pi}{24}, \frac{9\pi}{24}, \frac{11\pi}{24}$ בהסתברויות

$$\mathbf{P}(X = r) = C \sin r$$

. מצא את הקבוע C ואת התוחלת $\mathbf{E}[X]$.
   ב. למשתנה המקרי X יש צפיפות

$$f(x) = D \sin x \qquad 0 \leq x \leq \pi/2$$

מצא את הקבוע D ואת התוחלת $\mathbf{E}[X]$.

4. במפעל מסוים פועלות שתי מכונות, מכונה A ומכונה B. 10% מתוצרת המפעל מיוצרת במכונה A, ו-90% במכונה B. 1% מהמוצרים המיוצרים במכונה A הם פגומים, ו-5% מהמוצרים המיוצרים במכונה B.
   א. נבחר מוצר אקראי. מה ההסתברות שהוא פגום?
   ב. נמצא מוצר פגום. מה ההסתברות שהוא מיוצר במכונה A?
   ג. אחרי ביקור של טכנאי שמטפל במכונה B, מוצאים ש-1.9% של מוצרי המפעל הם פגומים. מה היא עכשיו ההסתברות שמוצר שיוצר במכונה B יהיה פגום?

5. למשתנה מקרי X יש פונקצית צפיפות

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{\mu x} & x \leq 0 \\ \lambda e^{-\mu x} & x > 0 \end{cases}$$

   כאשר λ, μ הם קבועים חיוביים.
   א. חשב את היחס בין λ ו-μ כך ש-$f(x)$ היא פונקצית צפיפות.
   ב. חשב את $\mathbf{E}[X]$ ואת $\mathrm{Var}(X)$.
   ג. חשב את פונקצית יוצרת המומנטים של X.
   (בשאלה זאת ניתן להשיב על סעיף ב. או לפני או אחרי סעיף ג.)

6. לזוג (X, Y) יש צפיפות משותפת

$$f(x, y) = C(x^2 + y^2) \qquad 0 \leq x, y \leq 1$$

   כאשר C הוא קבוע.
   א. מצא את C.
   ב. מצא את ההתפלגות השולית של X ואת $\mathbf{E}[X]$.
   ג. מצא את ההסתברות $\mathbf{P}(X \leq Y)$.

7. עבור משתנה מקרי בדיד X, פונקצית יוצרת ההסתברויות מוגדרת על ידי

$$p_X(t) = \mathbf{E}[t^X] = \sum_r \mathbf{P}(X = r) t^r$$

   כאשר הסכום הוא על כל הערכים האפשריים r של X.
   א. הוכח שאם $X \sim B(n, p)$ אזי $p_X(t) = [tp + (1-p)]^n$.
   ב. הוכח שאם X_1, X_2 הם בלתי תלויים אזי $p_{X_1+X_2}(t) = p_{X_1}(t) p_{X_2}(t)$. (כאן $p_{X_1}(t)$ היא פונקצית יוצרת ההסתברויות של X_1, $p_{X_2}(t)$ היא פונקצית יוצרת ההסתברויות של X_2, ו-$p_{X_1+X_2}(t)$ היא פונקצית יוצרת ההסתברויות של הסכום $X_1 + X_2$).
   ג. הוכח שאם $X_1 \sim B(n_1, p)$ ו-$X_2 \sim B(n_2, p)$ אזי פונקצית יוצרת ההסתברויות של $X_1 + X_2$ היא פונקצית יוצרת ההסתברויות של $B(n_1 + n_2, p)$.

בהצלחה!!