בס"ד

מבוא להסתברות, 88-162-01 **ד"ר ג'רמי שיף**

מבחן לדוגמה

זמן המבחן: שלש שעות.
מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס.
ניקוד כל השאלות שווה.
עליך לענות על כמה שאלות שאתה יכול, אך מספר קטן של פתרונות נכונים ומנומקים היטב עדיף ממספר גדול של פתרונות חלקיים.

1. א. משך שלוש שנים באוניברסיטה, סטודנט מסוים לומד 30 קורסים, והציונים שלו בכל קורס הם משתנים מקריים בלתי תלויים עם התפלגות זהה, בעלת תוחלת 80 ושונות 30. מה הן התוחלת והשונות של הממוצע שלו? מצא את ההסתברות שהממוצע שלו יהיה מעבר ל-82.
   ב. ל-X_1 יש התפלגות $B(100, \frac{1}{100})$ ול-X_2 יש התפלגות פאוסון עם פרמטר $\lambda = 1$. מצא את $\mathbf{P}(X_1 \leq 2)$ ואת $\mathbf{P}(X_2 \leq 2)$.

2. מתוך קבוצה של 20 איש
   א. מה היא ההסתברות שיש לפחות 2 אנשים עם ימי הולדת בחודש ינואר?
   ב. מה היא ההסתברות שיש בדיוק 2 אנשים עם ימי הולדת בחודש ינואר וגם בדיוק שני אנשים עם ימי הולדת בחודש פברואר?
   ג. מה היא ההסתברות שבחודש אחד (כל שהוא) נופלים לפחות 4 ימי הולדת של האנשים?
   (ניתן להניח שלכל איש יש הסתברות $\frac{1}{12}$ שיום הולדתו יפול בכל חודש מסוים.)

3. לזוג (X,Y) יש פונקצית צפיפות משותפת

$$f(x,y) = x + y \ , \qquad 0 \leq x,y \leq 1$$

   א. וודא שפונקציה זו מקיימת את התנאים של פונקצית צפיפות משותפת.
   ב. מצא את $\mathrm{Var}(X)$.
   ג. מצא את $\mathrm{cov}(X,Y)$. האם X,Y הם בלתי תלויים?

4. באוניברסיתה מסוימת יש מספר שווה של סטודנטים בשנה הראשונה, בשנה השניה ובשנה השלישית של הלימודים.נשים מהוות 60% מסטודנטי השנה הראשונה, 55% מסטודנטי השנה השניה ו-50% מסטודנטי השנה השלישית.
   א. נבחר סטודנט אקראי. מה ההסתברות שנבחרה אישה?
   ב. נבחר סטודנט אקראי, ונמצא שנבחרה אישה. מה ההסתברות שהיא לומדת בשנה הראשונה?
   ג. נבחר סטודנט אקראי, ונתון שאם נבחר סטודנט מהשנה הראשונה אזי נבחר איש. מה ההסתברות שנבחר איש מהשנה השלישית?

5. מטבע הוטל מספר פעמים עד לקבלת "ראש". לפני ההטלה הראשונה ההסתברות לקבל "ראש" היא $\frac{1}{2}$. כל פעם שהמטבע הוטל, ומתקבל "זנב", ההסתברות לקבלת "ראש" בהטלה הבאה עולה ב-$\frac{1}{10}$ (כך שאחרי שהתקבל "זנב" 5 פעמים כבר בטוח שבהטלה הבאה יתקבל "ראש"). אם X הוא מספר הפעמים שהמטבע הוטל, מצא
   א. את ההסתברויות $\mathbf{P}(X=r)$, $r=1,2,3,4,5,6$.
   ב. את התוחלת ואת השונות של X.

6. לשלושה משתנים מקריים בלתי תלויים X_1, X_2, X_3 יש התפלגות מערכית $E(\lambda)$.
   א. מצא את פונקצית הצפיפות של X_1+X_2.
   ב. מצא את פונקצית הצפיפות של $X_1+X_2+X_3$.
   ג. מצא את הפונקציה יוצרת המומנטים של X_1, $\phi_{X_1}(t)$.

7. B, C הם שני משתנים מקריים בלתי תלויים בעלי התפלגויות $U(0,1)$.
   א. מה היא הצפיפות המשותפת של הזוג (B, C) ?
   ב. מצא את ההסתברות שלמשוואה $x^2+2Bx+C=0$ יש שורשים ממשיים. מה היא ההסתברות שלמשוואה יש רק שורש אחד?
   ג. עבור המשוואה $x^2+2bx+C=0$, כאשר b הוא קבוע ו-C הוא משתנה מקרי בעל התפלגות $U(0,1)$, מה היא ההסתבות שהשורשים ממשייים?

בהצלחה!!