בס"ד

מבוא להסתברות, 88-162-01 **ד"ר ג'רמי שיף**

מבחן לדוגמה

זמן המבחן: שלש שעות.
מותר להשתמש בכל חומר עזר ובמחשב כיס.
ניקוד כל השאלות שווה.
עליך לענות על כמה שאלות שאתה יכול, אך מספר קטן של פתרונות נכונים ומנומקים היטב עדיף ממספר גדול של פתרונות חלקיים.

1. א. במדינה מסוימת, 49% תומכים במפלגה פוליטית A ו- 51% במפלגה פוליטית B. בסקר, שואלים 1000 איש באיזה מפלגה הם תומכים. מה התוחלת והשונות של מספר האנשים שמשיבים לסקר שהם תומכים במפלגה A ? מה היא ההסתברות שיותר מ-50% מהמשיבים לסקר תומכים במפלגה A ?
   ב. למשתנה מקרי X יש התפלגות פואסון (Poisson) עם פרמטר $\lambda = 10$. עבור איזה n ההסתברות $\mathbf{P}(X = n)$ היא הכי גבוהה ? מצא קירוב להסתברות $\mathbf{P}(X \geq 20)$.

2. א. מטבע תקין הוטל 100 פעמים. מה היא ההסתברות שבדיוק 50 פעמים מתקבל "ראש" ? (רמז: עבור n גדול, $n! \sim \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$)
   ב. אם מטילים קוביה תקינה 6 פעמים, מה היא ההסתברות שמקבלים את התוצאה 6 לפחות פעם אחת ? אם מטילים קוביה תקינה 12 פעמים, מה היא ההסתברות שמקבלים את התוצאה 6 לפחות פעמיים ? אם מטילים קוביה תקינה 18 פעמים, מה היא ההסתברות שמקבלים את התוצאה 6 לפחות שלוש פעמים ?
   ג. אם מטילים קוביה תקינה $6n$ פעמים, כאשר n גדול, מה היא (בקירוב) ההסתברות שמקבלים את התוצאה 6 לפחות n פעמים ?

3. למשתנה מקרי X יש פונקצית צפיפות

$$f(x) = \begin{cases} -cx^{-3} & x < -1 \\ c & -1 \leq x \leq 1 \\ +cx^{-3} & x > 1 \end{cases}$$

כאשר c קבוע.
   א. מצא את c.
   ב. מצא את $\mathbf{E}[X]$ ואת פונקצית ההצטברות $F(x)$.
   ג. מה הוא $\mathrm{Var}(X)$? נמק.

4. בבחירות במדינה מסוימת יש שני מועמדים A, B לתפקיד ראש הממשלה וארבעה מועמדים W, X, Y, Z לתפקיד סגן ראש הממשלה. 60% מהאוכלוסיה מצביעים למועמד A לראש הממשלה, וביניהם 60% מצביעים ל-W, 20% ל-X, 10% ל-Y ו10% ל-Z. שאר האוכלוסיה מצביעים ל-B, וביניהם 10% מצביעים ל-W, 60% ל-X, 15% ל-Y ו-15% ל-Z.
   א. מי נבחר לתפקיד סגן ראש ממשלה ? איזה מועמד בא במקום שני ?
   ב. אם ידוע שמישהו הצביע ל-W מה ההסתברות שגם הצביע ל-A ? ואם ידוע שמישהו הצביע ל-X מה ההסתברות שהצביע ל-A ?
   ג. נערכות בחירות שניות לתפקיד סגן, שבהן יש רק שני מועמדים W, X . אם כל אלה במחנה B שהצביעו ל-Y ו-Z עכשיו מצביעים ל-X, ובין אלה שבמחנה A שהצביעו ל-Y ו-Z 25% מצביעים ל-X, והשאר ל-W, מי עכשיו נבחר לתפקיד סגן ?

5. בחנות ספרים מסוימת יש 6 עותקים של ספר מסוים. ההסתברות שמישהו יקנה את העותק הראשון של הספר הוא 0.5. בגלל שאנשים ממליצים לחבריהם לקנות ספרים שהם כבר קנו, כל פעם שנמכר עותק של הספר, ההסתברות למכור את העותק הבא עולה ב- 0.1. אם X הוא מספר הספרים שימכרו, מצא:
   א. את ההסתברויות $\mathbf{P}(X = j)$, $j = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$,
   ב. את $\mathbf{E}[X]$ ואת $\mathrm{Var}(X)$.

6. לזוג של משתנים מקריים (X, Y) יש פונקציית צפיפות משותפת

$$f(x, y) = cx(x + y) \qquad\qquad 0 \le x, y \le 1$$

   א. מצא את c.
   ב. מצא את פונקציות ההצטברות של X ושל Y .
   ג. הוכח ש-

$$\mathbf{P}(0 < X < a, 0 < Y < b) = \mathbf{P}(0 < X < a)\ \mathbf{P}(0 < Y < b)$$

(זאת אומרת, האירועים $0 < X < a$ ו- $0 < Y < b$ הם בלתי-תלויים) אם ורק אם a או b שווים לאחד.

7. מקל, בעל אורך 1 מטר, נשבר באופן מקרי.
   א. מה היא התוחלת של אורך החלק הקצר ?
   ב. מה היא התוחלת של היחס של אורך החלק הקצר לאורך החלק הארוך ?
   ג. למה התוחלת של היחס שחשבת בסעיף ב. איננו שווה ליחס של התוחלת של אורך החלק הקצר לתוחלת של אורך החלק הארוך ?

בהצלחה!!