

1. שלושה כדורים שחורים ושלושה כדורים לבנים נמצאים בשני כדים, עם שלושה כדורים בכל כד. אומרים שהמערכת נמצאת במצב i אם יש i כדורים לבנים בכד הראשון, $i = 0, 1, 2, 3$. בכל צעד מעבירים באקראי כדור אחד מהכד הראשון לשני, וכדור אחד מהשני לראשון. אם X_n מציין את המצב של המערכת בזמן n , מצא את מטריצת המעבר של שרשרת המרקוב X_n . מצא גם את ההתפלגות הקבועה.

2. בסדרה של ניסויי ברנולי בלתי תלויים עם סיכוי להצלחה p , אומרים שהמערכת במצב 0 אם שני הניסויים האחרונים נתנו הצלחות, במצב 1 אם הניסוי האחרון נתן הצלחה אבל הניסוי אחד לפניו נתן כשלון, במצב 2 אם הניסוי האחרון נתן כשלון אבל הניסוי אחד לפניו נתן הצלחה, ובמצב 3 אם שני הניסויים האחרונים נתנו כשלונות. מצא את מטריצת המעבר P של שרשרת מרקוב זה. הוכח שכל המטריצות P^n עבור n גדול מ-1 הן שוות, והסבר את המשמעות.

אם לשרשרת מרקוב יש מטריצת מעבר P , וקיימים $N > 1$ ומספרים Π_j כך ש-

$$(P^N)_{ij} = \Pi_j,$$

הוכח שלכל $n > N$

$$(P^n)_{ij} = \Pi_j.$$

3. אם בשרשרת מרקוב מסמנים את הסתברות המעבר $P(X_{n+1} = j | X_n = i)$ על ידי P_{ij} , ואת הסתברות ההתחלתית $P(X_0 = i)$ על ידי a_i , מצא

$$P(X_1 = X_2) \quad (\text{א})$$

$$P(X_1 = i | X_2 = j) \quad (\text{ב})$$

$$P(X_3 = X_0 | X_1 = X_2) \quad (\text{ג})$$

4. לשרשרת מרקוב עם מטריצת המעבר

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{4}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{10} & \frac{2}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{10} & \frac{7}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

(א) מצא את המחלקות המקושרות.

(ב) מצא את כל ההתפלגויות הקבועות.

5. כתוב את מטריצת המעבר למשחק "נחשים וסולמות" למטה (משחקים עם קוביה אחת ומסיימים את המשחק כאשר מגיעים ל-30 או עוברים אותו). מצא את התוחלת של הזמן עד לסיום המשחק.



בהצלחה!