פתרון תרגיל בית 2 – מבוא להסתברות וסטטיסטיקה 88-165 – קיץ 2013

1). להושיב 3 בנים ו-5 בנות בשורה: ישנם סה"כ 8 אנשים ולכן מס' האפשרויות: $\boxed{8!}$.

להושיב אותם כך שכל הבנים וכל הבנות יושבים ביחד: $\boxed{2!\cdot 3!\cdot 5!}$.

להושיב אותם מסביב לשולחן עגול: $(8-1)!=\boxed{7!}$

להושיב אותם כך שכל הבנים וכל הבנות יושבים ביחד: $\boxed{3!\cdot 5!}$.

2). מספר המילים השונות (לאו דווקא בעלות משמעות) שניתן ליצור מכל אותיות המילה MISSISSIPPI:

סה"כ יש 11 אותיות מתוכן ארבע I (זהות), ארבע S (זהות), ושתי P (זהות) – לכן סה"כ: $\boxed{\dfrac{11!}{4!\cdot 4!\cdot 2!}}$

3). מספר הדרכים לבחור ועד של חמישה אנשים מתוך שניים-עשר : $\binom{12}{5}=\boxed{792}$

מספר הדרכים לחלק 12 אנשים ל-3 ועדים של 3 , 4, ו- 5 אנשים : $\boxed{\dfrac{12!}{5!\cdot 4!\cdot 3!}}$.

הסבר: אין חשיבות לסדר בחירת האנשים בתוך כל ועד.

4).

א. לבחור r אנשים מתוך $n+m$: $\boxed{\binom{n+m}{r}}$

ב. מספר הדרכים לבחור r אנשים מתוך קבוצה של n גברים ו- m נשים, אם רוצים שבקבוצה הנבחרת יהיו k נשים (יש להניח ש- $r<n,m$): $\boxed{\binom{m}{k}\binom{n}{r-k}}$

ג. צ"ל : $\binom{m+m}{r}=\binom{n}{0}\binom{m}{r}+\binom{n}{1}\binom{m}{r-1}+\ldots+\binom{n}{r-1}\binom{m}{1}+\binom{n}{r}\binom{m}{0}$

<u>הוכחה קומבינטורית:</u>

סה"כ האפשרויות לבחירת r אנשים מתוך $n+m$ הוא סכום האפשרויות לבחור :

0 מ- n ואת כל ה- r מ- m או-

1 מ- n ו- $r-1$ (כל הנותרים) מ- m או-

2 מ- n ו- $r-2$ (כל הנותרים) מ- m וכך הלאה...

את כל ה- r מ- n ו- 0 מ- m מ.ש.ל.

<u>הוכחה אלגברית:</u>

נשתמש בנוסחת הבינום של ניוטון - $(X+Y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k Y^{n-k}$

ונחשב:

$$(X+1)^{n+m} = \binom{n+m}{0} X^0 + \binom{n+m}{1} X^1 + \binom{n+m}{2} X^2 + \ldots + \binom{n+m}{r} X^r + \ldots + \binom{n+m}{n+m} X^{n+m}$$

ניתן לראות שהביטוי שברצוננו להוכיח, $\binom{n+m}{r}$, מופיע במשוואת הבינום כמקדם של X^r,

נבטא בדרך נוספת את המקדם של X^r:

$$(X+1)^{n+m} = (X+1)^n (X+1)^m$$

$$= \left[\left(\binom{n}{0} X^0 + \binom{n}{1} X^1 + \ldots + \binom{n}{r} X^r + \ldots + \binom{n}{n} X^n \right) \left(\binom{m}{0} X^0 + \binom{m}{1} X^1 + \ldots + \binom{m}{r} X^r + \ldots + \binom{m}{m} X^m \right) \right]$$

אם נפתח את הסוגריים ונכפיל לפי חוק הפילוג, יתקבל סכום של ביטויים, כשכל ביטוי הוא מכפלה של X בחזקה כלשהי ומקדם.

נסכם את כל הביטויים שהם מכפלה של X בחזקת r ומקדם (כי ברצוננו לבטא בדרך נוספת את <u>המקדם של</u> X^r):

$$\binom{n}{0} X^0 \binom{m}{r} X^r + \binom{n}{1} X^1 \binom{m}{r-1} X^{r-1} + \ldots + \binom{n}{r-1} X^{r-1} \binom{m}{1} X^1 + \binom{n}{r} X^r \binom{m}{0} X^0$$

$$= X^r \left[\binom{n}{0}\binom{m}{r} + \binom{n}{1}\binom{m}{r-1} + \ldots + \binom{n}{r-1}\binom{m}{1} + \binom{n}{r}\binom{m}{0} \right]$$

לפיכך נוכל לרשום את השיוויון,

$$\binom{m+n}{r} X^r = \left[\binom{n}{0}\binom{m}{r} + \binom{n}{1}\binom{m}{r-1} + \ldots + \binom{n}{r-1}\binom{m}{1} + \binom{n}{r}\binom{m}{0} \right] X^r$$

ומכאן,

$$\binom{m+n}{r} = \left[\binom{n}{0}\binom{m}{r} + \binom{n}{1}\binom{m}{r-1} + \ldots + \binom{n}{r-1}\binom{m}{1} + \binom{n}{r}\binom{m}{0} \right]$$

מ.ש.ל.

5). ההסתברות המבוקשת: $P=\binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$

שימוש בקירוב סטירלינג נותן:

$$P=\binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}=\frac{(2n)!}{(n!)^2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\approx\frac{\sqrt{2\pi 2n}}{2\pi n}\frac{(2n/e)^{2n}}{(n/e)^{2n}}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\cdot 2^{2n}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}=\boxed{\frac{1}{\sqrt{\pi n}}}$$

6). ההסתברות שיהיו בדיוק 13 קלפים שחורים בכל ערימה:

$$\frac{\binom{26}{13}\binom{26}{13}}{\binom{52}{26}}$$

ההסתברות שיהיו $r=0,1,...,13$ קלפים שחורים בערימה אחת ו- $26-r$ באחרת:

$$\frac{\binom{26}{r}\binom{26}{26-r}}{\binom{52}{26}}$$

הערה: חישוב נומרי מראה שהתוצאה הנפוצה ביותר מתקבלת עבור $r=13$.

7).

א. אפשרויות חלוקת n כדורים <u>זהים</u> ל- r תאים: $\boxed{\binom{n+r-1}{n}}$ או לחילופין: $\boxed{\binom{n+r-1}{r-1}}$.

ב. אפשרויות חלוקת n כדורים <u>זהים</u> ל- r תאים כך שבכל תא לפחות 2 כדורים:

$$\binom{(n-2r)+r-1}{r-1}=\boxed{\binom{n-r-1}{r-1}}$$

או לחילופין: $\binom{(n-2r)+r-1}{n-2r}=\boxed{\binom{n-r-1}{n-2r}}$.