פתרון תרגיל בית 3 – מבוא להסתברות וסטטיסטיקה 88-165 – קיץ 2013

1. נתון כי A, B, C הם מאורעות. צריך להוכיח:

$$P\left(A^C\cap\left(B\cup C\right)\right)=P(B)+P(C)-P(B\cap C)-P(C\cap A)-P(A\cap B)+P(A\cap B\cap C)$$

הוכחה: (הערה – ישנן דרכים חלופיות ששתיים מהן המובאת להלן).

<u>דרך אחת:</u>

$$\begin{aligned}
&P\left(A^C\cap\left(B\cup C\right)\right)\\
&=P\left(\left(A^C\cap B\right)\cup\left(A^C\cap C\right)\cup\varnothing\right)=P\left(\left(A^C\cap B\right)\cup\left(A^C\cap C\right)\cup\left(A^C\cap A\right)\right)\\
&=P\left(\left(A\cup B\cup C\right)\cap A^C\right)=P\left(\left(A\cup B\cup C\right)\setminus A\right)\\
&=P\left(\left(A\cup B\cup C\right)\right)-P\left(A\right)\\
&=\left[P(A)+P(B)+P(C)-P(B\cap C)-P(A\cap C)-P(A\cap B)+P(A\cap B\cap C)\right]-P(A)\\
&=P(B)+P(C)-P(B\cap C)-P(A\cap C)-P(A\cap B)+P(A\cap B\cap C)
\end{aligned}$$

<u>דרך נוספת:</u>

נעזר בשוויון הבא, הנכון לכל שני מאורעות D, E.

$$\left(D^C\cap E\right)\cup\left(D\cap E\right)=E\qquad\Rightarrow\left(D^C\cap E\right)=E\setminus\left(D\cap E\right)$$

לפיכך:

$$\begin{aligned}
&P\left(A^C\cap\left(B\cup C\right)\right)=P(B\cup C)-P\left(A\cap\left(B\cup C\right)\right)\\
&=\left[P(B)+P(C)-P(B\cap C)\right]-P\left(\left(A\cap B\right)\cup\left(A\cap C\right)\right)\\
&=P(B\cap C)-\left[P\left(A\cap B\right)+P\left(A\cap C\right)-P\left(\left(A\cap B\right)\cap\left(A\cap C\right)\right)\right]\\
&=P(B)+P(C)-P(B\cap C)-P\left(A\cap B\right)-P\left(A\cap C\right)+P\left(A\cap B\cap C\right)
\end{aligned}$$

2.

א. מכלל איחוד ההסתברויות של מאורעות, ומכך שלכל שני מאורעות $P\left(A\cap B\right)\geq 0$, נובע:

$$P\left(A\cup B\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right)-P\left(A\cap B\right)\leq P\left(A\right)+P\left(B\right)=0.1+0.2=0.3$$

ב. שוב מכלל איחוד ההסתברויות של מאורעות, ומכך שלכל שני מאורעות $P\left(A\cup B\right)\leq 1$, נובע:

$$P\left(A\cap B\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right)-P\left(A\cup B\right)\geq P\left(A\right)+P\left(B\right)-1=0.9+0.8-1=0.7$$

ג. <u>הלמה של Boole</u>:

צ"ל: $P\left(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\right)\leq P\left(A_1\right)+P\left(A_2\right)+\cdots+P\left(A_n\right)$

<u>הוכחה:</u>

עבור $n=1$: $P\left(A_1\right)\leq P\left(A_1\right)$

עבור $n=2$: $P\left(A_1\cup A_2\right)=P\left(A_1\right)+P\left(A_2\right)-\underbrace{P\left(A_1\cap A_2\right)}_{\geq 0}\leq P\left(A_1\right)+P\left(A_2\right)$

הנחת האינדוקציה. ניח שהאי שוויון נכון עבור n:

$$P\left(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\right)\leq P\left(A_1\right)+P\left(A_2\right)+\cdots+P\left(A_n\right)$$

נוכיח נכונותו עבור $n+1$:

$$\begin{aligned}
&P\left(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup A_{n+1}\right)\\
&\quad=P\left(\left(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\right)\cup A_{n+1}\right)\\
&\quad\le P\left(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\right)+P\left(A_{n+1}\right) &&\{by\ n=2\ case\}\\
&\quad\le P\left(A_1\right)+P\left(A_2\right)+\cdots+P\left(A_n\right)+P\left(A_{n+1}\right) &&\{by\ induction\ assumption\}
\end{aligned}$$

מ.ש.ל.

<u>הלמה של Bonferroni</u>:

צ"ל: $P\left(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\right)\ge P\left(A_1\right)+P\left(A_2\right)+\cdots+P\left(A_n\right)-(n-1)$

<u>הוכחה</u>:

עבור $n=1$: $P\left(A_1\right)\ge P\left(A_1\right)$

עבור $n=2$: $P\left(A_1\cap A_2\right)=P\left(A_1\right)+P\left(A_2\right)-\underbrace{P\left(A_1\cup A_2\right)}_{\le 1}\ge P\left(A_1\right)+P\left(A_2\right)-1$

הנחת האינדוקציה. נניח שהאי שוויון נכון עבור כל n:

$$P\left(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\right)\ge P\left(A_1\right)+P\left(A_2\right)+\cdots+P\left(A_n\right)-(n-1)$$

נוכיח נכונותו עבור $n+1$:

(המעברים מוצדקים מאותם נימוקים כמו בהוכחת אי שוויון Boole לעיל)

$$\begin{aligned}
&P\left(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\cap A_{n+1}\right)\\
&=P\left(\left(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\right)\cap A_{n+1}\right)\ge P\left(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\right)+P\left(A_{n+1}\right)-1\\
&\ge\left[P\left(A_1\right)+P\left(A_2\right)+\cdots+P\left(A_n\right)-(n-1)\right]+P\left(A_{n+1}\right)-1\\
&=P\left(A_1\right)+P\left(A_2\right)+\cdots+P\left(A_n\right)+P\left(A_{n+1}\right)-n
\end{aligned}$$

מ.ש.ל.

3.

א. ההסתברות שאחד בלבד משני המאורעות A, B קרה נתונה ע"י הביטוי:

$$P\left(A\wedge B\right)=P\left[\left(A^C\cap B\right)\cup\left(A\cap B^C\right)\right]=P\left(A^C\cap B\right)+P\left(A\cap B^C\right)$$

כידוע, לכל שני מאורעות D, E מתקיים:

$$\begin{aligned}
&\left(D^C\cap E\right)\cup\left(D\cap E\right)=E \qquad \Rightarrow\left(D^C\cap E\right)=E\setminus\left(D\cap E\right)\\
&\Rightarrow P\left(D^C\cap E\right)=P\left(E\right)-P\left(D\cap E\right)
\end{aligned}$$

לפיכך:

$$\begin{aligned}
&P\left(A\wedge B\right)=P\left(A^C\cap B\right)+P\left(A\cap B^C\right)\\
&=\left[P\left(B\right)-P\left(A\cap B\right)\right]+\left[P\left(A\right)-P\left(A\cap B\right)\right]\\
&=P\left(A\right)+P\left(B\right)-2P\left(A\cap B\right)
\end{aligned}$$

ב. צ"ל: $\left(A \wedge B\right) \wedge C = A \wedge \left(B \wedge C\right)$

הוכחה: נעזר בהגדרת הפעולה $\wedge$.

$$\begin{aligned}
\left(A \wedge B\right) \wedge C &= \left(A \wedge B\right) \cup C - \left(A \wedge B\right) \cap C \\
&= \left(A \cup B - A \cap B\right) \cup C - \left(A \cup B - A \cap B\right) \cap C \\
&= A \cup B \cup C - A \cap B \cup C - A \cup B \cap C + A \cap B \cap C \\
&= A \cup \left(B \cup C - B \cap C\right) - A \cap \left(B \cup C - B \cap C\right) \\
&= A \cup \left(B \wedge C\right) - A \cap \left(B \wedge C\right) \\
&= A \wedge \left(B \wedge C\right)
\end{aligned}$$

מ.ש.ל.

הערה: אפשר כמובן להוכיח בדרכים נוספות, כגון פיתוח בנפרד של כל אגף והגעה לאותו ביטוי.

ג. עבור שלושה מאורעות A, B, C:

$$\begin{aligned}
&P\left(A \wedge B \wedge C\right) \\
&= P\left(A \cup B \cup C\right) - P\left(A \cap B\right) - P\left(A \cap C\right) - P\left(B \cap C\right) + 2P\left(A \cap B \cap C\right) \\
&= \left[P\left(A\right) + P\left(B\right) + P\left(C\right) - P\left(A \cap B\right) - P\left(A \cap C\right) - P\left(B \cap C\right) + P\left(A \cap B \cap C\right)\right] \\
&\quad - P\left(A \cap B\right) - P\left(A \cap C\right) - P\left(B \cap C\right) + 2P\left(A \cap B \cap C\right) \\
&= P\left(A\right) + P\left(B\right) + P\left(C\right) - 2P\left(A \cap B\right) - 2P\left(A \cap C\right) - 2P\left(B \cap C\right) + 3P\left(A \cap B \cap C\right)
\end{aligned}$$

ד. הכללה בעזרת נוסחת ההכלה וההדחה:

$$P\left(\wedge_{i=i}^{n} A_i\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P\left(A_1\right) - 2\sum_{i<j} P\left(A_i \cap A_j\right) + 3\sum_{i<j<k} P\left(A_i \cap A_j \cap A_k\right) - \ldots + \left(-1\right)^{n-1} nP\left(A_1 \cap \ldots \cap A_n\right)$$

4.

א. מדובר בסדרת ניסויי ברנולי, עם הסתברות של p להצלחה בכל ניסוי. נסמן ב- A את המאורע "לא מתקבל 6 אף פעם". ההסתברות המבוקשת:

$$P\left(A\right) = \binom{n}{0} p^0 \left(1-p\right)^n = \boxed{\left(1-p\right)^n}$$

ב. המאורע בסעיף זה הוא המשלים למאורע בסעיף קודם, כלומר A^C. לפיכך:

$$P\left(A^C\right) = 1 - P\left(A\right) = \boxed{1 - \left(1-p\right)^n}$$

נשים לב שזה שווה גם ל-: $P\left(A^C\right) = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} p^i \left(1-p\right)^{n-i}$

ג. אכן מקבלים תשובה זהה אם משתמשים בכלל ההכלה וההדחה.

נגדיר A_i – יצא "6" בדיוק i פעמים (מתוך סה"כ n ההטלות) $0 \le i \le n$.

ההסתברות של כל A_i כזה היא: $P\left(A_i\right) = \binom{n}{i} p^i \left(1-p\right)^{n-i}$

בנוסף לכך, עבור כל A_i, A_j $i \neq j$ מתקיים: $A_i \cap A_j = \varnothing$ (מכיוון שיכול להיות רק מספר אחד ל- "בדיוק i הצלחות בסבב של n הטלות"). נשתמש בנוסחת ההכלה וההדחה:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\le i<j\le n} P\left(A_i \cap A_j\right) + \cdots + (-1)^{n+1} P\left(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

וקיבלנו תוצאה זהה לזו שבסעיף קודם.

5. נסמן ב- A את התוצאה הראשונה וב- B את התוצאה השניה. יהי i סכום תוצאות ההטלות.

א. ברור שלכל $2 \le i \le 6$ מתקיים $P(A) = 0$.

בעזרת נוסחת ההסתברות המותנית, ותוך שימוש בכך שההטלות ב"ת האחת בשניה, נכתוב:

$$P(A=6 \mid A+B=i) = \frac{P\left(A \cap (A+B=i)\right)}{P(A+B=i)} = \frac{P\left(A=6 \cap B=i-6\right)}{P(A+B=i)}$$

$$= \frac{P(A=6)P(B=i-6)}{P(A+B=i)}$$

כעת, $P(A+B=i) = \frac{13-i}{36}, \quad P(B=i-6) = \frac{1}{6}, \quad P(A=6) = \frac{1}{6}$

לבסוף:

$$P(A=6 \mid A+B=i) = \begin{cases} 0 & ,i \le 6 \\ \frac{1}{13-i} & ,i \ge 7 \end{cases}$$

ב. שוב, בעזרת נוסחת ההסתברות המותנית, ותוך שימוש בכך שההטלות ב"ת האחת בשניה:

גם כעת ברור שלכל $2 \le i \le 6$ מתקיים $P(A) = 0$.

לנוחות החישוב נפריד למקרים הבאים:

כאשר $7 \le i \le 11$ (התוצאה "6" יכולה לצאת פעם אחת בלבד לכל היותר):

$$P\left[(A=6 \cup B=6) \mid A+B=i\right] = P(A=6 \mid A+B=i) + P(B=6 \mid A+B=i)$$

$$= \frac{P(A=6)P(B=i-6)}{P(A+B=i)} + \frac{P(B=6)P(A=i-6)}{P(A+B=i)}$$

ומטעמי סימטריה:

$$= \frac{2 \cdot P(A=6)P(B=i-6)}{P(A+B=i)}$$

$$= \frac{2 \cdot \frac{1}{36}}{\frac{13-i}{36}} = \frac{2}{13-i}$$

במקרה האחרון, כאשר $i = 12$, שתי תוצאות ההטלה חייבות להיות "6" $\Leftarrow$ לכן ההסתברות שאחת התוצאות יצאה "6" היא 1.

לבסוף:

$$P\left[\left(A=6\cup B=6\right)|\,A+B=i\right]=\begin{cases}0 & ,i\le 6\\ \dfrac{2}{13-i} & ,7\le i\le 11\\ 1 & ,i=12\end{cases}$$

6. ההסתברות ששני הכדורים הראשונים שנבחרו הם <u>שחורים</u> היא:

$$P=\frac{7}{12}\cdot\frac{9}{14}=\boxed{\frac{3}{8}}$$

ההסתברות ששני הכדורים הראשונים שנבחרו הם <u>לבנים</u> היא:

$$P=\frac{5}{12}\cdot\frac{7}{14}=\boxed{\frac{5}{24}}$$

ההסתברות ש- n הכדורים הראשונים שנבחרו הם <u>שחורים</u> היא:

$$P=\frac{7}{12}\cdot\frac{7+2}{12+2}\cdot\frac{7+2\cdot 2}{12+2\cdot 2}\cdot\ldots\cdot\frac{7+2\left(n-1\right)}{12+2\left(n-1\right)}=\boxed{\prod_{k=1}^{n}\frac{7+2\left(k-1\right)}{12+2\left(k-1\right)}}$$

7. נסמן: M – זכר, F – נקבה, B – עיוור צבעים.

$P\left(M\right)=0.48$ $\qquad P\left(F\right)=0.52$

$P\left(B|M\right)=0.05$ $\qquad P\left(B|F\right)=0.0025$

א. נעזר בנוסחת ההסתברות השלמה:

$$P\left(B\right)=P\left(B|M\right)P\left(M\right)+P\left(B|F\right)P\left(F\right)=0.05\cdot 0.48+0.0025\cdot 0.25=\boxed{0.0253}$$

ב. נעזר בנוסחת בייס:

$$P\left(M\,|\,B\right)=\frac{P\left(B|M\right)P\left(M\right)}{P\left(B\right)}=\frac{0.05\cdot 0.48}{0.0253}=\boxed{0.949}$$

8. נסמן את המאורע: D – העוגה איננה תופחת. מנתוני השאלה:

$P\left(A\right)=0.5$ $\qquad P\left(B\right)=0.3$ $\qquad P\left(C\right)=0.2$

$P\left(D|A\right)=0.02$ $\qquad P\left(D|B\right)=0.03$ $\qquad P\left(D|C\right)=0.05$

נעזר בנוסחת בייס לחשב את ההסתברות המבוקשת:

$$P\left(A|D\right)=\frac{P\left(D|A\right)P\left(A\right)}{P\left(D\right)}$$

חישוב המכנה מתבצע בעזרת נוסחת ההסתברות השלמה:

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D|A)P(A)+P(D|B)P(B)+P(D|C)P(C) \\ &= 0.02\cdot 0.5+0.03\cdot 0.3+0.05\cdot 0.2=0.029 \end{aligned}$$

נציב בנוסחת ההסתברות השלמה ונקבל:

$$P(A|D)=\frac{P(D|A)P(A)}{P(D)}=\frac{0.02\cdot 0.5}{0.029}=\frac{0.01}{0.029}=\boxed{0.345}$$

9. נסמן:

A – כל הכדורים שהוצאו הם לבנים.

D – תוצאת הטלה הקובייה.

ההסתברות המבוקשת: $P(D=3|A)$

נעזר בנוסחת בייס לחישוב:

$$P(D=3|A)=\frac{P(A|D=3)P(D=3)}{P(A)}$$

את המכנה נחשב בעזרת נוסחת ההסתברות השלמה:

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{k=1}^{6}P(A|D=k)P(D=k) \\ &= \frac{1}{6}\cdot\left[\frac{5}{15}+\left(\frac{5}{15}\cdot\frac{4}{14}\right)+\left(\frac{5}{15}\cdot\frac{4}{14}\cdot\frac{3}{13}\right)+\left(\frac{5}{15}\cdot\frac{4}{14}\cdot\frac{3}{13}\cdot\frac{2}{12}\right)+\left(\frac{5}{15}\cdot\frac{4}{14}\cdot\frac{3}{13}\cdot\frac{2}{12}\cdot\frac{1}{11}\right)+0\right] \\ &= \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{11}=\frac{5}{66} \end{aligned}$$

נציב בנוסחת בייס לקבל את ההסתברות המבוקשת:

$$P(D=3|A)=\frac{P(A|D=3)P(D=3)}{P(A)}=\frac{\left(\frac{5}{15}\cdot\frac{4}{14}\cdot\frac{3}{13}\right)\cdot\frac{1}{6}}{\frac{5}{66}}=\boxed{\frac{22}{455}}$$