פתרון תרגיל בית 4 – מבוא להסתברות וסטטיסטיקה 88-165 – קיץ 2013

1. נסמן את המאורעות הבאים: K – הסטודנט קרא את ההוראות. B – הסטודנט יקבל ציון B.

מהנתונים: $P(B|K)=\frac{1}{4};\ \ P(B|K^c)=\frac{1}{5}$

א). נעזר בנוסחת ההסתברות השלמה: $P(B)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{4}=\boxed{0.2125}$

ב). נעזר בנוסחת בייס: $P(K|B)=\frac{P(B|K)P(K)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}}{0.2125}=\boxed{0.294}$

3. שאלת הוכחה.

א. למעשה צריך להוכיח כי: $P\left[A\cap(B\cup C)\right]=P(A)\cdot P(B\cup C)$

הוכחה:

$$\begin{aligned}
&P\left[A\cap(B\cup C)\right]=P\left[(A\cap B)\cup(A\cap C)\right]\\
&=P(A\cap B)+P(A\cap C)-P\left[(A\cap B)\cap(A\cap C)\right]\\
&=P(A\cap B)+P(A\cap C)-P(A\cap B\cap C)\\
&=P(A\cap B)+P(A\cap C)-P(\varnothing)=P(A\cap B)+P(A\cap C)\\
&=P(A)P(B)+P(A)P(C)=P(A)(P(B)+P(C))\\
&=P(A)P(B\cup C)
\end{aligned}$$

מ.ש.ל.

<u>הערה</u>: בהוכחה הסתמכנו על אסוציאטיביות החיתוך, חוק הפילוג לחיתוך, וכן על אקסיומות הסתברות.

4. הערה: בכל הסעיפים נעזר בנוסחת הסכום של סדרה הנדסית אינסופית.

ההסתברות שהראשון ינצח כאשר יש 2 משתתפים:

$$P\left(\#1\ of\ \ 2\right)=p+\left(1-p\right)^2p+\left(1-p\right)^4p+\left(1-p\right)^6p+\ldots=\frac{p}{1-\left(1-p\right)^2}=\boxed{\frac{1}{2-p}}$$

ההסתברות שהראשון ינצח כאשר יש 3 משתתפים:

$$P\left(\#1\ of\ \ 3\right)=p+\left(1-p\right)^3p+\left(1-p\right)^6p+\ldots=\frac{p}{1-\left(1-p\right)^3}=\boxed{\frac{1}{p^2-3p+3}}$$

ההסתברות שהראשון ינצח כאשר יש n משתתפים:

$$P\left(\#1\ of\ \ n\right)=p+\left(1-p\right)^np+\left(1-p\right)^{2n}p+\ldots=\boxed{\frac{p}{1-\left(1-p\right)^n}}$$

5. נסמן: C – שמרן, L – ליברל.
המאורע A – החבר הצביע אותו דבר 3 פעמים ברצף.
המאורע A מורכב מכך שהחבר הצביע 3 פעמים "כן" או 3 פעמים "לא", לכן:

$$P(3\times Same)=P(3\times Yes)+P(3\times No)$$

בעזרת נוסחת ההסתברות השלמה נחשב:

$$P(3\times Yes)=P(3\times Yes\,|\,C)P(C)+P(3\times Yes\,|\,L)P(L)$$

$$=1\cdot\frac{n}{100}+p\cdot\frac{100-n}{100}=p+(1-p)\frac{n}{100}$$

מטעמי סימטריה ההסתברות הנ"ל שווה להסתברות $P(3\times No)$.

לפיכך ההסתברות המבוקשת: $P(3\times Same)=2\left[p+(1-p)\frac{n}{100}\right]$.

6. יהי X מ"מ המציין את מס' הכדורים השחורים שנשלפו מתוך 4 כדורים שנשלפו סה"כ.
תחום הערכים של המ"מ: $1\le X\le 4$.

טבלת פונקציית ההסתברות:

$X=k$	1	2	3	4
$P(X=k)$	2/42	15/42	20/42	5/42

פרטי החישוב:

$$P(X=3)=\frac{\binom{6}{3}\binom{3}{1}}{\binom{9}{4}}=\frac{20}{42}\qquad P(X=1)=\frac{\binom{6}{1}\binom{3}{3}}{\binom{9}{4}}=\frac{2}{42}$$

$$P(X=4)=\frac{\binom{6}{4}\binom{3}{0}}{\binom{9}{4}}=\frac{5}{42}\qquad P(X=2)=\frac{\binom{6}{2}\binom{3}{2}}{\binom{9}{4}}=\frac{15}{42}$$

התוחלת והשונות של X:

$$E(X)=\frac{1}{42}(1\cdot2+2\cdot15+3\cdot20+4\cdot5)=\boxed{\frac{8}{3}}$$

חישוב עזר: $E(X^2)=\frac{1}{42}\left(1^2\cdot2+2^2\cdot15+3^2\cdot20+4^2\cdot5\right)=\frac{23}{3}$

$$V(X)=E(X^2)-\left[E(X)\right]^2=\frac{23}{3}-\left(\frac{8}{3}\right)^2=\boxed{\frac{5}{9}}$$

7. ערך הקבוע k:

$$1=\sum_{i=0}^{4}P\left(X=i\right)=\sum_{i=0}^{4}\frac{k-i}{3k}=\frac{k}{3k}+\frac{k-1}{3k}+\ldots+\frac{k-4}{3k}=\frac{5k-10}{3k}\qquad\Rightarrow\boxed{k=5}$$

התוחלת:

$$E\left[X\right]=\sum_{i=0}^{4}i\cdot P\left(X=i\right)=\sum_{i=0}^{4}\frac{i\left(5-i\right)}{15}=\boxed{\frac{4}{3}}$$

השונות:

$$E\left[X^2\right]=\sum_{i=0}^{4}i^2\cdot P\left(X=i\right)=\sum_{i=0}^{4}\frac{i^2\left(5-i\right)}{15}=\frac{10}{3}$$

$$V\left[X\right]=E\left[X^2\right]-\left(E\left[X\right]\right)^2=\frac{10}{3}-\left(\frac{4}{3}\right)^2=\boxed{\frac{14}{9}}$$

8. ערך הקבוע c:

$$1=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{c}{3^i}=c\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^i=c\left(\frac{1}{1-1/3}\right)\qquad\Rightarrow\boxed{c=\frac{2}{3}}$$

התוחלת של X:

$$E\left[X\right]=\sum_{i=0}^{\infty}i\cdot P(X=i)=\sum_{i=0}^{\infty}i\cdot 2/3\cdot\frac{1}{3^i}=2/3\sum_{i=0}^{\infty}\frac{i}{3^i}\overset{(*)}{=}2/3\cdot 3/4=\boxed{\frac{1}{2}}$$

(*) חישוב המעבר ע"י סכום סדרה הנדסית:

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{i}{3^i}=1\cdot(1/3)+2\cdot(1/3)^2+3\cdot(1/3)^3+\ldots=1/3\cdot\left(1+2\cdot(1/3)+3\cdot(1/3)^2+\ldots.\right)$$

$$=1/3\cdot\frac{1}{(1-1/3)^2}=\frac{3}{4}$$

ההסתברות ש- $X>5$:

$$P(X>5)=1-P(\le 5)$$

$$=1-\frac{2}{3}\cdot\left[\left(\frac{1}{3}\right)^0+\left(\frac{1}{3}\right)^1+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^4+\left(\frac{1}{3}\right)^5\right]=\boxed{0.00137}$$

ההסתברות ש- X אי-זוגי:

$$P(X\ odd)=1-P(X\ even)=1-\sum_{k=0}^{\infty}P(X=2k)=1-2/3\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^{2k}}$$

$$=1-2/3\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^k=1-2/3\cdot\left(\frac{1}{1-1/9}\right)=1-3/4=\boxed{\frac{1}{4}}$$

9. המ"מ X מקבל את הערכים 0, 2, 4, 6, 8.

פונקציית ההתפלגות של $Z=\left(X-2\right)^2$:

טבלת חישוב הטרנספורמציה:

$X=k$	0	2	4	6	8
$z=\left(x-2\right)^2$	4	0	4	16	36
P ($X=k$)	1/9	2/9	3/9	2/9	1/9

פונקציית ההתפלגות של Z:

$Z=k$	0	4	16	36
P ($Z=k$)	2/9	4/9	2/9	1/9

התוחלת והשונות של Z:

$$E\left(X\right)=0+4\cdot\frac{4}{9}+16\cdot\frac{2}{9}+36\cdot\frac{1}{9}=\boxed{\frac{28}{3}}$$

חישוב עזר: $E\left(X^2\right)=0+4^2\cdot\frac{4}{9}+16^2\cdot\frac{2}{9}+36^2\cdot\frac{1}{9}=208$

$$V\left(X\right)=E\left(X^2\right)-\left[E\left(X\right)\right]^2=208-\left(\frac{28}{3}\right)^2=\boxed{120.889}$$

פונקציית ההתפלגות של $Y=\frac{X-2}{X+2}$:

$Y=k$	-1	0	1/3	1/2	3/5
P ($Y=k$)	1/9	2/9	3/9	2/9	1/9

התוחלת והשונות של Y:

$$E\left(X\right)=-1\cdot\frac{1}{9}+0\cdot\frac{2}{9}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{9}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{9}+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{9}=\boxed{\frac{8}{45}}$$

חישוב עזר: $E\left(X^2\right)=\left(-1\right)^2\cdot\frac{1}{9}+0^2\cdot\frac{2}{9}+\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{3}{9}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{2}{9}+\left(\frac{3}{5}\right)^2\cdot\frac{1}{9}=\frac{329}{1350}$

$$V\left(X\right)=E\left(X^2\right)-\left[E\left(X\right)\right]^2=\frac{329}{1350}-\left(\frac{8}{45}\right)^2=\boxed{0.2121}$$