

1. (א) שני המשתנים המקריים X ו- Y מקבלים את הערכים 0 ו-1 בלבד. ההתפלגות המשותפת של הזוג (X, Y) ניתנת על ידי

$$\begin{aligned} P(X=0, Y=0) &= a & P(X=0, Y=1) &= b \\ P(X=1, Y=0) &= c & P(X=1, Y=1) &= 1-a-b-c \end{aligned}$$

כאשר a, b, c הם מספרים לא שליליים עם $a+b+c \leq 1$. מצא תנאים מספיקים והכרחיים על a, b, c כך ש- X ו- Y יהיו בלתי תלויים, והוכח שהם בלתי תלויים אם ורק אם הם בלתי-מותאמים.

(ב) המשתנה המקרי X מקבל את הערכים 0, 1 והמשתנה המקרי Y מקבל את הערכים -1, 0, 1. ההתפלגות המשותפת של הזוג (X, Y) ניתנת על ידי

$$\begin{aligned} P(X=0, Y=-1) &= a & P(X=0, Y=0) &= b & P(X=0, Y=1) &= c \\ P(X=1, Y=-1) &= d & P(X=1, Y=0) &= e & P(X=1, Y=1) &= 1-a-b-c-d-e \end{aligned}$$

כאשר a, b, c, d, e הם מספרים לא שליליים עם $a+b+c+d+e \leq 1$. מצא תנאים מספיקים ו- n מספיקים והכרחיים על a, b, c, d, e כך ש- X ו- Y יהיו בלתי תלויים, ותנאים מספיקים והכרחיים שיהיו בלתי מותאמים. מצא מקרה שבה המשתנים הם בלתי-מותאמים אבל אינם בלתי-תלויים.

2. בכד נמצאים ארבע כדורים, שניים מסומנים בספרה 1, אחד בספרה 2 והאחרון בספרה 3. מוציאים שני כדורים מן הכד. יהי X המספר הרשום על הראשון שהוצא, ו- Y המספר הרשום על השני. מצא את $E[X]$, $E[Y]$, $E[X+Y]$, $Var(X)$, $Var(Y)$, $Var(X+Y)$ כאשר ההוצאה נעשית (א) עם החזרה ו-(ב) בלי החזרה.

3. בוחרים באקראי שני מספרים שונים מתוך n המספרים הטבעיים הראשונים. אם הראשון הוא X והשני הוא Y , מצא את $E[X]$, $E[Y]$, $Var(X)$, $Var(Y)$, את ההתפלגות המשותפת של הזוג (X, Y) , את $cov(X, Y)$ ואת $\rho(X, Y)$.

$$\text{תזכורת: } \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

4. בכד נמצאים a כדורים שחורים, b כדורים לבנים ו- c כדורים אדומים. שולפים באקראי r כדורים מהכד, כאשר $r \leq \min(a, b, c)$, ללא החזרות. אם X הוא מספר השחורים שנשלפו, ו- Y הוא מספר הלבנים, מצא את ההתפלגות המשותפת של הזוג (X, Y) . איזה שינוי נדרש כאשר $r > \min(a, b, c)$ (אבל עדיין $r \leq a+b+c$)?

כתוב תוכנית מחשב אשר תחשב את $\rho(X, Y)$ עבור ערכים נתונים של a, b, c, r . בדוק את התוכנית שלך עבור כל האפשרויות של a, b, c, r עם $a, b, c > 0$, $a+b+c=10$, $r=3$.

5. (א) בוחרים באקראי שני מספרים (אולי זהים) מתוך n המספרים הטבעיים הראשונים. אם הראשון הוא X והשני הוא Y , מה היא ההתפלגות המשותפת של הזוג (X, Y) ? מצא את ההתפלגות של $M = \max(X, Y)$ ואת התוחלת ואת השונות של M .

(ב) בוחרים באקראי r מספרים (כל מספר יכול להופיע כמה פעמים) מתוך n המספרים הטבעיים הראשונים. אם $X_1, X_2, \dots, X_r$ מסמנים את המספרים שנבחרו, מה היא ההתפלגות של $M = \max(X_1, X_2, \dots, X_r)$? מצא נוסחאות לתוחלת ולשונות של M . בדוק (דרך

המחשב) את ההשערה שעבור n גדול התוחלת של M היא בערך $n(1 - \frac{1}{r})$. מה אפשר להגיד לגבי השונות כאשר n גדול?

(ג) בהמשך לסעיף (ב): מה היא ההתפלגות של $\sec(X_1, X_2, \dots, X_r)$, דהיינו המספר השני בגודלו מבין $X_1, X_2, \dots, X_r$?

6. מטייל הגיע לצומת שיוצאים ממנה 3 כבישים, שאינם מסומנים, ואינו יודע איזה מהם הוא הכביש לעיר הקרובה. אם ילך באחד הכבישים, יחזור לצומת אחרי שעה. אם ילך בשני יחזור לצומת אחרי 6 שעות. אם ילך בשלישי יגיע לעיר אחרי 3 שעות. מצא את התוחלת של הזמן עד שהוא מגיע לעיר. (יש להניח שאם/כאשר הוא חוזר לצומת אינו זוכר באיזה כביש יצא ממנו, והוא בוחר באקראי אחד מ-3 הכבישים לנסות להגיע בו לעיר).

7. בכד יש n_1 כדורים שחורים, n_2 כדורים לבנים ו- n_3 כדורים אדומים, כאשר $n_1, n_2, n_3 \geq 2$. שולפים כדורים בזה אחר זה עם החזרות. מהי התוחלת של מספר הכדורים שיש לשלוף עד שיופיע שוב כדור עם הצבע של הכדור הראשון? מה אם שולפים כדורים בלי החזרות?

בהצלחה!