פתרון תרגיל בית 5 – מבוא להסתברות וסטטיסטיקה 88-165 – קיץ 2013

.1

א. נשרטט טבלה מתאימה להסתברויות:

$X \setminus Y$	0	1
0	a	b
1	c	1 – a – b – c

המ"מ X ו- Y בלתי תלויים אם"ם:

$$(1).\ P(X=0,Y=0)=P(X=0)P(Y=0)=a$$
$$(2).\ P(X=0,Y=1)=P(X=0)P(Y=1)=b$$
$$(3).\ P(X=1,Y=0)=P(X=1)P(Y=0)=c$$
$$(4).\ P(X=1,Y=1)=P(X=1)P(Y=1)=1-a-b-c$$

מ-(1) ו-(2) ומ-(3) ו-(4) נקבל:

$$\frac{a}{P(Y=0)}=\frac{b}{P(Y=1)}$$
$$\frac{c}{P(Y=0)}=\frac{1-a-b-c}{P(Y=1)}$$
$$\frac{a}{b}=\frac{c}{1-a-b-c}$$
$$a(1-a-b-c)=bc$$
$$\boxed{a(1-a-b-c)-bc=0} \qquad \Rightarrow \left\{a=a,b=b,c=\frac{a(1-a-b)}{a+b}\right\}$$

כאשר המשתנים בלתי תלויים:

$$Cov(X,Y)=E[XY]-E[X]E[Y]=E[X]E[Y]-E[X]E[Y]=0$$

כאשר המשתנים בלתי מתואמים:

$$E[XY]=0+0+0+1\cdot(1-a-b-c)=1-a-b-c$$
$$E[X]=0+1\cdot(1-a-b)=1-a-b$$
$$E[Y]=0+1\cdot(1-a-c)=1-a-c$$

כעת, המ"מ בלתי מתואמים ($Cov(X,Y)=0$) אזי:

$$\begin{aligned}0=Cov(X,Y)&=E[XY]-E[X]E[Y]\\&=(1-a-b-c)-(1-a-b)(1-a-c)\\&=(1-a-b-c)-\left(1-2a-b-c+ab+ac+bc+a^2\right)\\&=a-ac-ab-bc-a^2\\&=\boxed{a(1-a-b-c)-bc}\end{aligned}$$

וזה בדיוק התנאי שקיבלנו ש- X ו- Y יהיו בלתי תלויים.

ב. נשרטט טבלה מתאימה להסתברויות:

$X \setminus Y$	-1	0	1
0	a	b	c
1	d	e	1 – a – b – c – d – e

באופן דומה לסעיף א', המ"מ בלתי תלויים אם"ם:

$$(1).\ P(X=0,Y=-1)=P(X=0)P(Y=-1)=a$$

$$(2).\ P(X=0,Y=0)=P(X=0)P(Y=0)=b$$

$$(3).\ P(X=0,Y=1)=P(X=0)P(Y=1)=c$$

$$(4).\ P(X=1,Y=-1)=P(X=1)P(Y=-1)=d$$

$$(5).\ P(X=1,Y=0)=P(X=1)P(Y=0)=e$$

$$(6).\ P(X=1,Y=1)=P(X=1)P(Y=1)=1-a-b-c-d-e$$

מתקבלים התנאים:

$$\begin{cases} ae=bd \\ ce(b+e)=b\left(e-bd-de-be-e^2\right) \end{cases}$$

כעת, נמצא את התנאי שהמ"מ בלתי מתואמים $Cov(X,Y)=0$:

$$0=Cov(X,Y)=E[XY]-E[X]E[Y]$$

$$0=(1-a-b-c-d-e)-(1-a-b-c)(1-2a-b-2d-e)-d$$

וזה התנאי ההכרחי שהמ"מ יהיו בלתי מתואמים.

<u>דוגמה</u> שבה X ו-Y תלויים אבל בלתי מתואמים:

X \ Y	-1	0	1
0	0	1/2	0
1	1/4	0	1/4

קל בדוק ש- X ו-Y תלויים, לדוגמה:

$$P(X=0,Y=-1)=\boxed{0}\neq P(X=0)P(Y=-1)=1/2\cdot 1/4=\boxed{1/8}$$

אבל:

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= E[XY]-E[X]E[Y] \\ &= \left(-1\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{1}{4}\right)-\left(0+1\cdot\frac{1}{2}\right)\left(-1\cdot\frac{1}{4}+0+1\cdot\frac{1}{4}\right) \\ &= 0-\frac{1}{2}\cdot 0=\boxed{0} \end{aligned}$$

2. נתון שהכד מכיל את הכדורים: [1, 1, 2, 3].

א. <u>הוצאה עם החזרה</u>:

במקרה זה ההוצאות ב"ת האחת בשניה, ומטעמי סימטריה ההתפלגות של X שווה להתפלגות של Y.

לכן מתקיים $E[X]=E[Y]$ וגם $V[X]=V[Y]$.

פונקציית ההסתברות של X (ושל Y בשינוי סימן המ"מ) היא:

$P(X=1)=1/2,\quad P(X=2)=1/4,\quad P(X=3)=1/4$.

התוחלת: $E[X]=1\cdot 1/2+2\cdot 1/4+3\cdot 1/4=\boxed{1.75}$

השונות: חישוב עזר- $E\left[X^2\right]=1^2\cdot 1/2+2^2\cdot 1/4+3^2\cdot 1/4=3.75$

$$V[X]=E\left[X^2\right]-\left(E[X]\right)^2=3.75-1.75^2=\boxed{0.6875}$$

לכן גם: $E[Y]=\boxed{1.75}$ ו- $V[Y]=\boxed{0.6875}$.

בעזרת לינאריות התוחלת נחשב: $E[X+Y]=E[X]+E[Y]=2\cdot 1.75=\boxed{3.5}$

מכיוון ש-X ו-Y ב"ת, אזי השונות: $V[X+Y]=V[X]+V[Y]=2\cdot 0.6875=\boxed{1.375}$

ב. <u>הוצאה ללא החזרה</u>:

במקרה זה ההוצאות תלויות. ההוצאה השניה מושפעת מהראשונה.

פונקציית ההסתברות של X נשארת ללא שינוי. ההוצאה הראשונה איננה מושפעת מהשניה:

$P(X=1)=1/2,\quad P(X=2)=1/4,\quad P(X=3)=1/4$.

פונקציית ההסתברות של Y תחושב בעזרת נוסחת ההסתברות השלמה:

$$P(Y=1)=\sum_{k=1}^{3}P(Y=1\,|\,X=k)P(X=k)$$
$$=P(Y=1\,|\,X=1)P(X=1)+P(Y=1\,|\,X=2)P(X=2)+P(Y=1\,|\,X=3)P(X=3)$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

באותו אופן:

$$P(Y=2)=\sum_{k=1}^{3}P(Y=2\,|\,X=k)P(X=k)$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}+0+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\boxed{\frac{1}{4}}$$

$$P(Y=3)=\sum_{k=1}^{3}P(Y=3\,|\,X=k)P(X=k)$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}+0=\boxed{\frac{1}{4}}$$

קיבלנו שההתפלגות השולית של Y זהה להתפלגות השולית של X.

לפיכך נקבל אותן תוצאות כמו בסעיף הקודם לתוחלת ולשונות-

התוחלת: $E[X]=E[Y]=\boxed{1.75}$ והשונות: $V[X]=V[Y]=\boxed{0.6875}$.

<u>דרך נוספת</u> לחישוב $E[Y]$ היא ע"י כלל ההחלקה $E[Y]=E\left[E[Y\mid X]\right]$:

$$E[Y\mid X=1]=1\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{3}+3\cdot\frac{1}{3}=2$$

$$E[Y\mid X=2]=1\cdot\frac{2}{3}+3\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$$

$$E[Y\mid X=3]=1\cdot\frac{2}{3}+2\cdot\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$

כעת: $E[Y]=E\left[E[Y\mid X]\right]=2\cdot\frac{2}{4}+\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{21}{12}=\boxed{1.75}$

עבור $X+Y$:

חישוב $E[X+Y]$ – ייעשה שוב מלינאריות התוחלת:

$$E[X+Y]=E[X]+E[Y]=2\cdot 1.75=\boxed{3.5}$$

לצורך חישוב שונות הסכום $V[X+Y]$ יש לחשב את השונות המשותפת $Cov(X,Y)$, זאת מאחר והמשתנים תלויים, וייתכן בהחלט ש- $Cov(X,Y)\neq 0$.

$$E(XY)=\sum_{x=1,y=1}^{3,3}xyP(X=x,Y=y)$$

$$=1\cdot1\cdot\frac{1}{6}+1\cdot2\cdot\frac{1}{6}+1\cdot3\cdot\frac{1}{6}+2\cdot1\cdot\frac{1}{6}+0+2\cdot3\cdot\frac{1}{12}+3\cdot1\cdot\frac{1}{6}+3\cdot2\cdot\frac{1}{12}+0$$

$$=\frac{17}{6}=\boxed{2.8333}$$

$$Cov(X,Y)=E[XY]-E[X]E[Y]=2.8333-1.75^2=-0.2292$$

ולכן שונות הסכום:

$$V[X+Y]=V[X]+V[Y]+2Cov(X,Y)=2\cdot0.6875-2\cdot0.2292=\boxed{0.9166}=\boxed{\frac{11}{12}}$$

3. מנתוני השאלה: $X\sim U[1,\dots,n]$,

לכן $P(X=k)=\frac{1}{n}$ עבור $1\le k\le n$, ואילו $P(Y=k)=\frac{1}{n-1}$. מכאן-

$$E[X]=\frac{1}{n}(1+2+\cdots+n)=\frac{1}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\boxed{\frac{n+1}{2}}$$

$$E[Y]=\frac{1}{n-1}(1+2+\cdots+n)=\boxed{\frac{n(n+1)}{2(n-1)}}$$

השונות:

חישוב עזר- $$E\left[X^2\right]=\frac{1}{n}\left(1^2+2^2+\cdots+n^2\right)=\frac{1}{n}\cdot\frac{n(n+1)(n+1)}{6}=\frac{(n+1)(n+1)}{6}$$

$$V[X]=\left[\frac{(n+1)(n+1)}{6}\right]-\left(\frac{n+1}{2}\right)^2=\boxed{\frac{n^2-1}{12}}$$

חישוב עזר- $$E\left[Y^2\right]=\frac{1}{n-1}\left(1^2+2^2+\cdots+n^2\right)=\frac{1}{n-1}\cdot\frac{n(n+1)(n+1)}{6}$$

$$V[Y]=\left[\frac{1}{n-1}\cdot\frac{n(n+1)(n+1)}{6}\right]-\left(\frac{n(n+1)}{2(n-1)}\right)^2=\frac{n(n+1)(n^2+n+4)}{12(n-1)^2}$$

ההתפלגות המשותפת של (X,Y):

$$P(X=i,Y=j)=\begin{cases}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{(n-1)} & i\neq j\\ 0 & i=j\end{cases}$$ (עבור $1\leq i,j\leq n$)

השונות המשותפת: $Cov(X,Y)=E[XY]-E[X]E[Y]$

$$E[XY]=\sum_{i,j}ijP(X=i,Y=j)=2\cdot\left[\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{(n-1)}\right]\left[\frac{(n-1)n(n+1)}{6}\right]=\boxed{\frac{n+1}{3}}$$

מכאן-

$$Cov(X,Y)=\frac{n+1}{3}-\left[\frac{n+2}{1}\right]\left[\frac{n(n+1)}{2(n-1)}\right]=\boxed{\frac{(n+1)\left(-3n^2+n-4\right)}{12(n-1)}}$$

ומקדם המתאם מתקבל מהצבה בנוסחה: $$\rho(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)\cdot V(Y)}}$$

4. ההתפלגות המשותפת של (X,Y) כאשר $r\leq\min(a,b,c)$:

$$P(X=i,Y=j)=\frac{\binom{a}{i}\binom{b}{j}\binom{c}{r-i-j}}{\binom{a+b+c}{r}}\qquad 0\leq i,j\leq r,\ i+j\leq r$$

הערה: כאשר $r>\min(a,b,c)$ יש להביא בחשבון את המקרים הבלתי אפשריים, כאשר אי אפשר להוציא יותר כדורים מצבע מסויים מאשר ישנם מאותו הצבע. כלומר, ההסתברות למקרה כזה היא 0.

.5

א. ההתפלגות המשותפת של (X,Y) היא:

$$P(X=i,Y=j)=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n^2} \qquad 1\le i,j\le n$$

הסבר: מכיוון שלפי תיאור הבחירה המשתנים בלתי תלויים, אזי ההתפלגות המשותפת שווה למכפלת התפלגויותיהם השוליות.

נמצא את התפלגות $M=\max(X,Y)$ בעזרת פונקציית ההתפלגות המצטברת:

$$P(M\le m)=P(\max(X,Y)\le m)=P(X\le m)\cdot P(Y\le m)$$

מטעמי סימטריה $P(X\le m)=P(Y\le m)=\frac{m}{n}$, לכן-

$$P(M\le m)=P(X\le m)\cdot P(Y\le m)=\frac{m^2}{n^2}$$

כעת נמצא את פונקציית ההסתברות של M:

$$P(M=m)=P(M\le m)-P(M\le m-1)=\frac{m^2}{n^2}-\frac{(m-1)^2}{n^2}=\frac{2m-1}{n^2}$$

עבור- $1\le m\le n$:

התוחלת:

$$E[M]=\sum_{m=1}^{n}mP(M=m)=\sum_{m=1}^{n}\frac{m(2m-1)}{n^2}=\boxed{\frac{(n+1)(4n-1)}{6n}}$$

חישוב השונות:

חישוב עזר-

$$E[M^2]=\sum_{m=1}^{n}m^2P(M=m)=\sum_{m=1}^{n}\frac{m^2(2m-1)}{n^2}=\frac{(n+1)(3n^2+n-1)}{6n}$$

והשונות-

$$V[M]=\frac{(n+1)(3n^2+n-1)}{6n}-\left[\frac{(n+1)(4n-1)}{6n}\right]^2=\boxed{\frac{n^2-1}{2}}$$

ב. יש לנו r מספרים $X_1,...,X_r$ מתוך n הטבעיים. הוגדר מ"מ $M=\max(X_1,...,X_r)$:

$$P(M\le m)=P(X_{(r)}\le m)=\prod_{j=1}^{r}P(X_j\le m)$$

מטעמי סימטריה $P(X_i\le m)=\frac{m}{n}$ עבור כל $i=1,...,r$, לכן-

$$P(M\le m)=\left[P(X_1\le m)\right]^r=\prod_{j=1}^{r}\frac{m}{n}=\left(\frac{m}{n}\right)^r$$

מכאן גם:

$$P\left(X_{(r)} \le m-1\right)=\left(\frac{m-1}{n}\right)^r$$

ולכן פונקציית ההסתברות של M:

$$P(M=m)=P(M\le m)-P(M\le m-1)$$
$$=\left(\frac{m}{n}\right)^r-\left(\frac{m-1}{n}\right)^r$$
$$=\boxed{\frac{m^r-(m-1)^r}{n^r}}$$

התוחלת:

$$E(M)=\sum_{k=1}^{r} kP(M=k)=\sum_{k=1}^{r} k\left[\frac{k^r-(k-1)^r}{n^r}\right]$$
$$=\frac{1}{n^r}\sum_{k=1}^{r} k\left[k^r-(k-1)^r\right]$$
$$=\frac{1}{n^r}\sum_{k=1}^{r}\left[k^{r+1}-k(k-1)^r\right]$$

בדיקה נומרית במחשב מראה שכאשר n גדול, ערך התוחלת קרוב ל- $n(1-\frac{1}{r})$.

6. נסמן ב- X את הזמן (בשעות) עד שהמטייל יגיע לעיר.
נסמן ב- Y את הכביש שהמטייל בוחר $(Y=1,2,3)$.
צריך למצוא את $E[X]$.
נשתמש בנוסחת ההחלקה:

$$E[X]=E\left[E(X|Y)\right]$$
$$=E(X|Y=1)P(Y=1)+E(X|Y=2)P(Y=2)+E(X|Y=3)P(Y=3)$$

מכיוון שהוא בוחר בין 3 הכבישים באקראי, אזי:

$$E[X]=\frac{1}{3}\left[E(X|Y=1)+E(X|Y=2)+E(X|Y=3)\right]$$

כמו כן מהנתונים:

$$E(X|Y=1)=1+E[X]$$
$$E(X|Y=2)=6+E[X]$$
$$E(X|Y=3)=3$$

הסבר: אם בחר בכביש 3 – יגיע לעיר אחרי מסע אחד של 3 שעות. אם בחר בכביש 1 או 2 – יחזור לנקודת ההתחלה כעבור שעה או 6 שעות בהתאמה, ואז יתחיל מסעו מחדש.

לפיכך:

$$E[X]=\frac{1}{3}\Big[\big(1+E[X]\big)+\big(6+E[X]\big)+3\Big]$$
$$\Rightarrow \boxed{E[X]=10}$$

7. נסמן: A – המאורע: הכדור הראשון שהוצא <u>שחור</u>.
B – המאורע: הכדור הראשון שהוצא <u>לבן</u>.
C – המאורע: הכדור הראשון שהוצא <u>אדום</u>.
X – משתנה מקרי הסופר את מס' הכדורים שנשלפו עד שהוצא שוב כדור בצבע הראשון.
$n_1+n_2+n_3=N$

<u>כאשר הכדורים נשלפים בזה אחר זה עם החזרות:</u>

נשתמש בנוסחת ההחלקה:

$$E[X]=E(X\mid A)P(A)+E(X\mid B)P(B)+E(X\mid C)P(C)$$

מהנתונים:

$$P(A)=\frac{n_1}{N},\qquad X\mid A\sim G\left(\frac{n_1}{N}\right)\Rightarrow E[X\mid A]=\frac{N}{n_1}$$
$$P(B)=\frac{n_2}{N},\qquad X\mid B\sim G\left(\frac{n_2}{N}\right)\Rightarrow E[X\mid B]=\frac{N}{n_2}$$
$$P(C)=\frac{n_3}{N},\qquad X\mid C\sim G\left(\frac{n_3}{N}\right)\Rightarrow E[X\mid C]=\frac{N}{n_3}$$

מכאן:

$$E[X]=\frac{n_1}{N}\cdot\frac{N}{n_1}+\frac{n_2}{N}\cdot\frac{N}{n_2}+\frac{n_3}{N}\cdot\frac{N}{n_3}=3$$

ואם נוסיף את הכדור הראשון שנשלף, נקבל סה"כ 4 כדורים.